Hódi Gyula

Fizika döcögőknek

korrepetáló tankönyv főleg középiskolásoknak

I. év – Mechanika

v3.1d (bemutató változat)

Értsd meg a jelenségeket, vágd be a képleteket
és törvényeket... és ragaszkodj hozzájuk.

Köszönöm egykori tanáromnak, Barthos Zoltánnénak, Gabi néninek, akit te is bírnál.

Szia.

Ez a szokatlan stílusú könyv azok kedvéért készült, akik nem jók fizikából, de szeretnének *jobbak* lenni.

A tankönyvek *képletekkel* próbálnak magyarázni. **Én szóban magyarázok**, a képleteket pedig a magyarázatok tanulságaként adom meg.

Ez a könyv ezért nem olyan "szakszerű", mint a te tankönyved. Az a jó fizikásoknak való. Azzal a tankönyvvel nem lehetsz túl elégedett, különben ezt talán nem is olvasnád.

Készülj fel arra, hogy *néhány fejezet nagyon hosszú*, mert minden lényeges dolgot elmagyarázok, részletesen. **Ellenőrző kérdésekkel** osztottam a szöveget szakaszokra. **Ezeknél tarts rövid pihenőt**, és gondold át a lényegét annak, amit olvastál. Ha nem érted, újra el kell olvasnod, mondatonként. **Meg fogod érteni**.

Amit **matekból** kell tudnod hozzá, azt az utolsó fejezetből megtanulhatod.

Használd ki jól a **példafeladatok**at önmagad ellenőrzésére, ne csak felületesen nézd át őket. Ahol a "**…**" jelzést látod, ott állj meg, és keresd a választ a kérdésre. Ne add fel túl hamar.

Ne fald, mert megfekszi az agyadat. Ha kapkodsz, úgy esélyed sincs, hiszen gyors tempóban eddig sem értetted.

Ez egy nagyon sűrű szöveg. Olvasgathatod félgőzzel is, de amikor megtanulni akarod, akkor rendesen neki kell ülnöd az olvasásának, különben szédelegni fogsz a sok információtól.

Sok tankönyv a mozgásokkal kezdi az anyagot és a mozgásokat létrehozó erőkkel folytatja. Én nem. A sorrend szerintem így ésszerű, engem is így tanítottak. De nem kötelező az elejéről haladnod. **Használd a tartalomjegyzéket.** (Könyvjelzők, bookmarks.) Ne felejtsd el, hogy **ebben a fájlban *keresni is tudsz***. (Valószínűleg Ctrl-F-fel.)

Amit megértettél, azt **meg is kell jegyezned**. Ne ringasd magad abban a hitben, hogy ha már érted, akkor bármikor fel is tudod idézni. Mondd is fel magadnak a tanultakat, félhangosan.

A képleteket és törvényeket meg kell tanulnod! Kívülről, betű szerint, mindenáron! Nem elég jó, amíg nem tudod bármikor gördülékenyen és hibátlanul elmondani. Nehéz, tudom, de nagyon fontos, hidd el nekem. Ha egy feladat megoldásakor sokáig kell törnöd rajta a fejedet, akkor fontos perceket veszítesz, ha pedig nem sikerül felidézni, akkor annyi.

Használd következetesen a tanult kifejezéseket. Segíteni fogok abban, hogy ezt megszokd.

Ezután rajtad a sor, próbáld **gyakorló feladatok** megoldásában felhasználni azt, amit a fejedben összeraktunk. Én elmagyarázom az elveket, példákat mutatok, de *a jegyeidet feladatok megoldásával szerzed.* Használj olyan feladatgyűjteményt, amelyik megadja az eredményt is. Ha az nem egyezik a tiéddel, akkor tudhatod, hogy hibáztál.

A könyvet **ne nyomtasd ki**, mert az ábrák színei eltűnnek, és úgy már nincs értelmük.

Mielőtt belefogsz, nézd meg a http://fizikasegitseg.atw.hu oldalon, hogy nincs-e ott egy ennél frissebb változat.

Ott letölthetsz egy **Fizika sietőknek** című rövidített, összefoglaló változatot is.

Ez nem a teljes könyv.

Próbáld ki, olvasd, használd, értékeld. Ha tetszik, akkor a teljes változat letöltéséhez kérlek, hogy keresd fel a http://fizikasegitseg.atw.hu oldalt.

A teljes változatban a következő fejezeteket találhatod:

Testek

A testnek ereje van, sebessége és energiája. De mi az a test?

Tömeg

A test egy általánosító fogalom, minden tárgy, amivel a fizikában történik valami, egy-egy test.

Minden testnek van tömege, ez az anyag elválaszthatatlan tulajdonsága. **A tömeg az anyag mennyiségét jelenti.** Az SI rendszerben **a tömeg alapmértékegysége a kilogramm**, annak ellenére, hogy a szó a gramm ezerszeresét (kilo) jelenti. (Lásd még a könyv végén a PREFIXUMOK fejezetet.)

Egyelőre nem sikerült olyan megbízható természeti etalont találni, amelyből a kilogramm bármikor rekonstruálható lenne, ezért 1 kilogramm tömeg egyenlő a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban őrzött **kilogramm-etalon** tömegével. Korábban az volt a definíció, hogy a kilogramm pontosan 1 dm^3 (1 liter) 4°C-os tiszta víz tömege; ezt ma már csak közelítő meghatározásként szabad használni.

Kb. $5{,}018370833\times10^{25}$ darab 12-es atomtömegű szénatom össztömege is 1 kg. Ez a kijelentés elég haszontalannak látszik, mégis fontolgatták már ehhez hasonló definíció megalkotását.

Az etalonból minden országnak vannak pontos másolatai, ezeket időnként összehasonlítják a Sèvresben hét lakat alatt őrzött eredetivel.

Érdekesség: Ha valaki lereszelne egy darabot az eredeti etalonból, akkor furcsa módon nem az etalont rontaná el a kilogrammhoz képest, hanem megváltoztatná magát a kilogrammot. Ezután elvileg a többi etalonból is le kellene reszelni, valamint átállítani a világ összes mérlegét és súlykészletét, árjegyzékét, fuvarozási szabályait, mérnöki szabványát stb. Persze a valóságban nyilván nem ez történne, de nagyon komoly fejtörést okozna.

Későbbi fejezetekben ki fog derülni, hogy **a tömeg két lényegi tulajdonságával válik számunkra érzékelhetővé és érdekessé: a tehetetlenségével és a tömegvonzásával**.

Egy test tömegét hétköznapi körülmények között a súlya alapján mérjük meg, vagy rugós mérleggel, vagy pedig összehasonlítva a súlyt egy ismert tömeg súlyával, kétkarú mérlegen. A súlytalanság körülményei között egyik módszer sem használható, ilyenkor a tömeget a tehetetlenségének a megmérésével állapítjuk meg, úgy, hogy *erőt fejtünk rá, és megmérjük, hogy ettől milyen gyorsan nő a sebessége*. Erről a 3. témakörben lesz szó, A DINAMIKA ALAPTÖRVÉNYE fejezetben. **A tömeg és a súly fogalmainak kettéválasztása** a feladatok pontos értelmezéséhez is fontos **alapkövetelmény**.

A **tömegmegmaradás elve** a következő: ha veszünk néhány testet, akkor akárhogy aprítjuk vagy összeforrasztjuk azokat, megolvasztjuk, megfagyasztjuk, összegyűjtve az elpárolgott anyagot is, a végül kapott testek **együttes tömege nem fog változni**. Már a 18. században is megfigyelték, hogy egy zárt kémcsőben levő tiszta széndarab – konkrétan egy apró gyémánt – és levegő együttes súlya nem változott meg attól, hogy a gyémántot kívülről hevítve elégették.

Tömeg nem semmisíthető meg és a semmiből nem keletkezhet. A zárt rendszerben levő tömeg állandó.

Titkos megjegyzés: A tömegmegmaradás elve nem teljesen érvényes *minden* elképzelhető helyzetre. Einstein látásból mindenki által ismert tétele, a *tömeg–energia ekvivalencia* tétele szerint a test nyugalmi tömege egyenesen arányos a testben tárolódó relativisztikus energia mennyiségével, és az arányossági tényező a vákuumban mért fénysebesség négyzete, tehát: $E=m\cdot c^2$. Ebből még az is kihozható, hogy a tömeg *energiasugárzássá alakulhat*. De ez a terület már nem tartozik a klasszikus fizika témakörébe, ejthetjük is.

Halmazállapot

Már kisiskolásként megtanultuk a három halmazállapotot: **szilárd, folyékony és légnemű**. A hőmérséklettel fölfelé haladva először megolvad, aztán elpárolog, lefelé először lecsapódik, aztán megszilárdul. Általában ennél többet nem is kell ezen agyalni.

De a dolog igazából nem ennyire egyértelmű, merthogy a folyadéknak az a definíciója, hogy a pillanatnyi alakját megváltoztatva felveszi az edény formáját és kitölti az alját. Azt viszont nem mondta meg senki, hogy ezt *mennyi időn belül* kell megtennie. A víz folyékony, oké. A méz is az, csak lassabban folyik.

Amikor már meg van cukrosodva, még lassabban. Egy ausztrál egyetemen 84 éve folyik egy kísérlet egy tölcsérbe öntött, megszilárdult szurokkal, szobahőmérsékleten; eddig 8 csepp esett le, a 9. csepp kialakulásának vége felé járunk. Szilárd vagy folyékony? Szóval kicsit zavaros ügy ez.

Negyedik halmazállapotnak tekintik a **plazma**állapotot, amikor az extrém forró anyagból már az elektronok is elszálltak, és maradt egy protonokból és neutronokból álló ionfelhő.

A légnemű halmazállapotot nem nevezhetjük egyszerűen gáznak, mert légnemű a pára és a gőz is, és általában a gázban oldott folyadék. Az egynemű gáz a zárt tartály teljes térfogatát egyenletesen kitölti (amíg a tartály magassága nem túl nagy), a zavartalan állapotban hagyott keverék pedig – mint például a levegővel keveredő szén-dioxid – szétválik, és a sűrűség szerint rétegződik.

> A **szilárd halmazállapot** nem azonos a test **szilárdság**ának fogalmával, sem az ideálisan **szilárd test** vagy **merev test** fogalmával. A szilárd halmazállapot az, hogy nem folyik, a szilárdság pedig addig tart, amíg a test repedése, törése, szakadása be nem következik. A szilárd test elméleti fogalma pedig a példákban jelenti azt, hogy a test alakja nagy erő hatására sem változik meg.

A légnemű anyagok összenyomhatók vagy ritkíthatók, ekkor a térfogatuk és a sűrűségük változik. **A folyadékokat összenyomhatatlannak** tekintjük, a térfogatuk és sűrűségük erő hatására nem változik meg.

Sűrűség

A sűrűség arról árulkodik, hogy a testbe "mennyi anyag van zsúfolva". **A sűrűség a test anyagából vett, egységnyi térfogatú darabnak a tömege.** A térfogat egysége az SI rendszerben a m^3 (lásd még erről a könyv végén levő MÉRTÉKEGYSÉGEK fejezetet.)

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

ahol ρ (rhó) a sűrűség, m a test tömege, V pedig a térfogata. A sűrűség mértékegysége

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

A feladatokban rendszerint egyenletes sűrűségű, homogén anyagú testek szerepelnek. A vas sűrűsége nagyjából 7800 kg/m^3, az alumíniumé 2700 kg/m^3, a vízé 1000 kg/m^3, a levegőé normál nyomáson 1,293 kg/m^3. A sűrűség kicsit függ az anyag hőmérsékletétől, gázok esetében a nyomásától is.

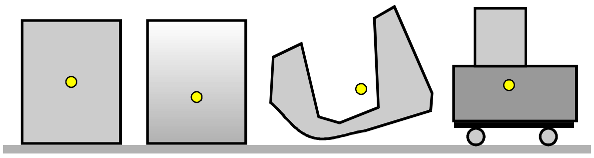
> Itt az alkalom arra, hogy feltedd magadnak a kérdést: mire emlékszel ebből a néhány bekezdésből. Ismerős fogalmakról van szó, hajlamosak vagyunk az ilyet csak átfutni. Ha minden érthető volt, akkor most olvasd el újra, és próbáld megjegyezni nem egyszerűen azt, amit olvastál, hanem azt is, hogy a fejezetben *miről volt szó*. Némítsd le a telefont, állítsd le a facebookot, a tévét, az öcsédet, még a zenét is. Olvasd el kortyonként, csak erre koncentrálva. Lásd, értelmezd, fogd fel teljességében, *illeszd hozzá más ismereteidhez*, és préseld be az emlékezetedbe. Itt ér véget az olvasgatás, és itt kezdődik a *munka*. **Tíz ilyen perc többet ér, mint fél óra a szokásosból.**

Tömegközéppont

Ha egy testet megforgatva feldobunk, akkor mindig egy bizonyos pontja körül fog forogni, bármelyik irányba. Ezt a pontot **tömegközéppont**nak hívjuk. Itt van "az anyagának" a középpontja.

Amikor majd a súlyról és az egyensúlyról lesz szó, a tömegközéppontot súlypontnak fogjuk hívni. A tömegvonzás és a súlyerő *támadáspontjának* is ezt tekintjük majd.

Matekból ismered a háromszög súlypontjának fogalmát. Ha egy tű hegyére fektetnéd a háromszöget, ezen a ponton feltámasztva, akkor az egyensúlyban maradna. Négyzetnél az átlók metszéspontja ez a pont és így tovább. Képzeld el, hogy a feltámasztott háromszög vastagodni kezd. Mintha egymásra raknánk rengeteg teljesen lapos, egyforma háromszöget. A súlypont, tömegközéppont vízszintesen ugyanott marad, ezért nem fog lebillenni. Függőleges irányban viszont emelkedik, úgy, hogy mindig a vastagságon belül félúton marad.



Homogén, egyenletes sűrűségű testben a tömegközéppont a test **mértani középpontjával** esik egybe. A példákban többnyire ilyen testekről esik majd szó. Inhomogén, egyenetlen sűrűségű testben viszont ez a pont a **sűrűbb rész** felé tolódik!

A tömegközéppont csak egy mértani pont, ami a testhez tartozik, és vele mozog. Ha fel tudnánk függeszteni a testet egy belső pontjában, a tömegközéppontjában, *akkor a test pontosan itt lenne egyensúlyban*.

Egy palack tömegközéppontja máshová kerül, ha kiöntöd belőle az ital egy részét. A tömegközéppont nem is mindig van a testen belül! Gondolj például egy gyűrűre vagy egy patkóra, az ábrán a harmadik test is ilyen.

Több testnek is (akár milliárdnyinak is) meghatározható a ***közös tömegközéppontja***, lehetnek ezek egy kocsi rakománya, egy csomó biliárdgolyó vagy akár csak egy kalapács. Ha a kalapácsot megpörgeted, jól látható, hogy a fej és a nyél által képzett *merev rendszer* tömegközéppontja a fej közelében van.

Egy rendszer testeinek közös tömegközéppontja a rendszer centruma.

Hol van egy vékony rúd tömegközéppontja? És ha U alakúra hajlítod?

Mozgástani feladatokban, képzeletben gyakran helyettesítünk egy testet egy vele *azonos* tömegű, a tömegközéppontjában levő, pontszerű objektummal. Vagy elképzeljük, hogy a test egész anyagát egyetlen pontnyi méretbe préseljük össze. Ilyenkor mondja úgy a feladat, hogy „Egy pontszerű test…”, és nem akarjuk tudni, hogy a test mekkora méretű, csak a tömege érdekes. Ezzel például ki akarjuk hagyni azt a lehetőséget, hogy a test foroghat, mert az csak belekavarna az adott helyzetről szóló magyarázatunkba. A pontszerű tömeget úgy is hívjuk, hogy **tömegpont**.

Figyelj: az előbb arról volt szó, hogy hol van a tömegközéppont, most pedig már arról, hogy annak a pontnak tömege is lehet, és akkor a testet ez a pontszerű tömeg fogja jelenteni. A tömegpontok egyformán egyetlen pontnyi méretűek, de a tömegük különböző lehet, bármennyi.

Erről szól a **tömegközéppont-tétel**:

Egy *pontrendszert* egyenértékűen helyettesíthetünk a közös tömegközéppontjukba helyezett képzeletbeli tömegponttal (az egyensúlyi és mozgástani feladatokban). A helyettesítő tömegpont tömege az egész rendszer össztömegével egyenlő.

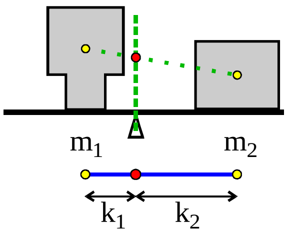
A pontrendszer olyan pontszerű tömegeket jelent, amelyek egymással kapcsolatban vannak, és egységes viselkedésű rendszert alkotnak. Egy test is pontrendszer, mert úgy vesszük, hogy végtelen sok apró tömegpontból rakódik össze, amelyeknek a helye ismert, és ezért meg tudjuk határozni a pontrendszer, a test tömegközéppontját. De egy testről pontrendszerként csak néhány törvény beszél, számunkra egy test csak test lesz, aminek látjuk a méretét, alakját. Viszont a tömegközéppont-tétel azt mondja ki, hogy ha azt nézzük, hogy a test milyen gyorsan halad, mennyi a súlya vagy mennyi a helyzeti energiája, akkor elég, ha az egész test helyett csak annak a tömegközéppontját figyeljük, méregetjük. Mert úgy egyszerűbb, és mert ez megengedett.

A tétel azzal, hogy pontrendszerről beszél, azt teszi lehetővé, hogy ha több testünk van, akkor mindegyiket helyettesíthessük a tömegközéppontjába tett tömegponttal, majd *ezeket a pontszerű tömegeket is* pontrendszernek vehessük, és helyettesíthessük az ő közös tömegközéppontjukba tett együttes tömegű ponttal. És ez lehet része újabb rendszernek is, és így tovább. Bizonyos esetben akár az egész Naprendszer helyettesíthető egyetlen tömegponttal, amelynek a tömege az egész Naprendszer együttes tömegével egyenlő. Ha a Tejútrendszer csillagai közötti vándorlásunkat nézzük, megkönnyítheti a számításokat. *Megengedett* az ilyen, a tétel ezt mondja, és látni fogod, hogy hogyan használjuk.

Pontszerű tömeggel a testek bármelyik *csoportja* is helyettesíthető.

Tudom, hogy nehéz ez a sok tömegpont, tömeg, pontszerű tömeg, tömegközéppont. De hát ez a nevük. De nem így megy ez a könyv legvégéig, ne aggódj. Olvasd el újra, és figyeld meg, hogy pontosan mi mire vonatkozik.

Mi a különbség a tömegközéppont és az oda képzelt pontszerű tömeg között?



Hogyan keressük meg két test centrumát (közös tömegközéppontját)? Először is mindkét testet behelyettesítjük a tömegközéppontjukba képzelt tömegponttal, majd ezt a két pontot képzeletben feltesszük egy mérleghintára. Most meg kell keresnünk azt a pontot, ahol a hintát alátámasztva az egyensúlyban van. A feltámasztás fölött van a két test rendszerének centruma, mellesleg a két tömegközéppontot összekötő egyenesen is. Ne felejtsd el, hogy az ábrán a két sárga pont *nem* egyforma nehéz.

Keresd meg néhány tárgy tömegközéppontját ezzel a módszerrel!

A centrum helye egész pontosan kiszámítható, a **mérleghinta-szabály** szerint. Ha m_1 és m_2 jelöli a két test tömegét, akkor a centrum, a piros pont úgy fog elhelyezkedni, hogy igaz legyen a következő:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

ahol k_1 és k_2 a centrum távolságai az m_1 és m_2 testektől, ahogy az ábra mutatja. *Vedd észre, hogy az indexek megfordulnak*. Azaz **a centrum távolsága a két tömegponttól *fordítottan* arányos a tömegekkel**. Vagy a két távolságnak, a hinta két karjának az aránya fordítottja a tömegek arányának. (Vagy mondhatjuk úgy is, hogy a centrum olyan arányban osztja ketté a szakaszt, mint amennyi a két test tömegének a reciproka.) Valamelyiket jegyezd meg, de előtte nézd is meg alaposan. Egyébként tapasztalatból is tudjuk, hogy a tálcát úgy fogjuk meg, hogy közelebb legyünk a tele pohárhoz, mint az üres pohárhoz, mert így lesz egyensúlyban. A kövér gyerek és a sovány gyerek között az egyensúlyi alátámasztási pont a kövér gyerekhez lesz közelebb.

A fenti képlet írható másképp is, ha a törtek nevezőivel "keresztbeszorzunk":

$$k_1 \cdot m_1 = k_2 \cdot m_2$$

Esetleg így könnyebben megjegyezhető. Ugyanaz van kétféleképpen leírva. Több test esetén mindig kettőt kiválasztasz, aztán a centrumokból is kettőt, és így haladsz, amíg egyetlen pontod marad.

Érdekesség: A Hold tömege csak 1/81 része a Föld tömegének. Ezért a Föld–Hold rendszer közös tömegközéppontja kb. 1600 kilométerrel a Föld felszíne alatt van, és igazából nem a Hold kering a Föld körül, hanem mindkét égitest "kering" e körül a pont körül.

Ha a mérleghinta három pontjából bármelyik kettő helyét ismerjük, akkor abból kiszámolható a harmadik pont helye is.

Kicsit hosszúnak találod? Lesz még sokkal hosszabb is. A tankönyvvel az egyik probléma az tud lenni, hogy rövid, de épp azért nem is érted. Egy egyébként méltán ismert középiskolai összefoglaló könyvből (Holics: Fizika) idézem *A tömegközéppont* fejezetet:

"Egy pontrendszer tömegközéppontján azt a pontot értjük, amelynek helyvektora: $r_{TKP} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ "

Ez volt a fejezet. No, ezek után nyugodtan dönthetsz, hogy inkább ezt a verziót fogyasztod, vagy állhatatosan átrágod magadat azon, amit én írtam, feltételezve rólam a segítő szándékot. :-) De keverheted is.

A tankönyvekkel az is lehet probléma, hogy messzebb mennek, mint ahol te még követni bírod. A tankönyv a jó fizikásokat igyekszik kiszolgálni. Előre szólok, hogy ebben a könyvben én nem mondok el mindent precízen. Megpróbálok megmaradni azon a körön belül, ameddig a te türelmed és erőd talán kiterjedhet. Egy-egy fejezetből sokszor utólag is kivettem részeket, itt is így történt. Ha a tanár kijavít téged, vagy hozzáfűz valamit ahhoz, amit mondasz, annak ez is lehet az oka.

Nem biztos, hogy tudsz róla, de a most használt PDF-néző programod (XChange, Foxit, Acrobat) lehetővé teszi szavak kiemelését, aláhúzását, megjegyzések beillesztését. Mentsd ki a letöltött könyvet, nyisd meg a fájlt a gépedről, és a változásokat mindig mentsd el.

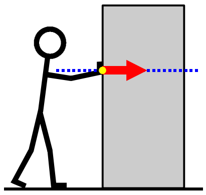
Erők

Ami a mozdulatlan, szilárd testek között zajlik.

A tananyag ebben az évben a **SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA**. Elsőként bevezetünk, megbeszélünk néhány alapfogalmat, aztán majd elkezdjük használni ezeket összetettebb fogalmak magyarázatában. Ha ti a mozgásokkal kezdtétek az évet, akkor is olvasgathatsz ebből a témakörből, mert nem nehéz.

Erő [redacted]

Az erő anyagi testek egymásra hatásának formája és mértéke. Ha egy test mozgása vagy alakja megváltozik, azt csakis egy erő okozhatta. **Az erőt mindig egy test hozza létre**, közvetlenül vagy erőtér közvetítésével hatva a másik testre. Ha egy testre erő hat, és a test mégis mozdulatlan marad, az csak azért lehetséges, mert valahonnan hat rá egy **ellenerő** is.



Az erő vektormennyiség, azaz van nagysága és iránya is. (Lásd a MATEK témakört!) Az **erővektor** vonalában elhelyezett egyenest az erő **hatásvonal**ának hívjuk, az erő **támadáspont**ja pedig az a pont, ahol az erő a testre hat. Tehát ha nekitámaszkodsz a szekrénynek, akkor erőt gyakorolsz rá, amely ez esetben vízszintes irányú, és a szekrény belseje felé mutat. A támadáspontja pedig ott van, ahol a szekrényt nyomod. Az erővektort *jelképező* nyilat mindig úgy helyezzük el a rajzon, hogy a nyíl kezdőpontja kerül az erő támadáspontjához.

Az erő "továbbadódhat" egy merev testen keresztül. Ha ráülünk egy székre, akkor a súlyerőnk nyomja a széket, a szék pedig nyomja a földet, továbbadva a súlyerőnket, hozzátéve még a saját súlyát is. A gyakorlatban az erő továbbadására jellegzetesen használt eszköz egy rúd vagy egy kötél, az utóbbi csak húzó irányban.

Mi hoz létre erőt? Mik az erővektor adatai? Mi kerül a támadásponthoz?

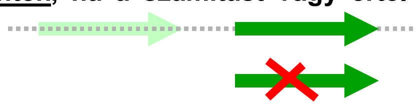
Az erő jele $\mathbf{F}$ (force), de néha más nagybetűvel jelöljük, például a súly esetében G-vel. A mértékegysége az SI mértékegységrendszerben a **newton (N)**. Mivel az erőt a test *tömegének* és az erő hatására létrejövő *gyorsulásának* a szorzatából származtatjuk (lásd később), a mértékegység megfeleltetése

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

A súly is az erő egyik előfordulási formája, lásd a SÚLYERŐ fejezetet. Egy 1 kg tömegű test súlya (tengerszinten) 9,80665 N, ezt a feladatokban gyakran 10 newtonra kerekítjük. Tehát 1 N körülbelül akkora, mint egy 10 dekagrammos tárgy súlya.

A feladatok megoldásában ragaszkodni kell a newtonhoz *minden* erő megadásakor, különben a mindenféle fizikai mértékegységek átváltása hibás lesz.

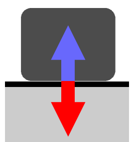
Az erő vektorát a rajzokon eltolhatjuk a saját hatásvonala mentén, ha a számítást vagy értelmezést ez megkönnyíti. A két vektor ilyenkor egyenértékű.



Kölcsönhatás, ellenerő

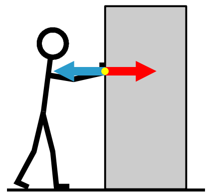
Newton III. törvénye (A *hatás–ellenhatás* törvénye):

Ha egy test erőt (hatást) fejt ki egy másik testre, akkor az a test *ugyanott* egy ugyanakkora, de ellentétes irányú ellenerőt (ellenhatást) fejt ki erre a testre. A két erő egymást kiegyenlíti.



Ha ülünk egy széken, akkor lefelé nyomjuk azt, ennek következményeként a szék felfelé nyom bennünket ugyanakkora erővel. Mi fejtünk ki egy erőt a székre, és a szék fejt ki egy ellenerőt ránk, ezek pedig kiegyenlítik egymást, ezért azonos nagyságúak, ellentétes irányúak. A két erővektor egy vonalba esik. A láda a piros erővel nyomja a földet, a föld ugyanakkora, de ellentétes irányú kék ellenerővel nyomja a ládát. *Vigyázz, mindig figyelj oda arra, hogy melyik erő melyik testre hat.*

Egy polcot lefelé húz a saját súlya és a rárakott tárgyak súlya, a polc ezeknek az erőknek *az összegével* húzza a kampókat, amelyekre a polc fel van függesztve. De a kampók ugyanakkora ellenerővel hatnak a polcra, ellentétes irányba. Ha a Föld vonz bennünket egy erővel, akkor *mi is vonzzuk* a Földet egy ugyanakkora erővel. Ha megpróbálunk eltolni egy nagy szekrényt, akkor vízszintesen nyomjuk egy erővel, a szekrény pedig minket nyom pontosan ugyanakkora erővel. Ha még erősebben nyomjuk, akkor az ellenerő is nő; ha nem nyomjuk, a szekrény sem nyom bennünket. Ha kötéllel *húzunk* egy szánkót, akkor a szánkó visszahúz bennünket ugyanakkora erővel.



Az ellenerő egy "aktív" erő "passzív" ellenerejeként születik, **igazodik hozzá**, kiegyenlíti azt. Mint például a szék ellenereje, válaszul arra az erőre, amennyivel mi nyomjuk. A szék nem nyomhat bennünket nagyobb erővel annál, mint amennyivel mi nyomjuk őt, különben felemelkednénk. De ha egy kigyúrt óriás ül rá, akkor a szék az ő súlyának megfelelő erőt fog kifejteni. Az aktív erőt valami létrehozza, erre a testre hatva, amitől ebben a testben ellenerő *indukálódik*, ami a másik testre visszahat.

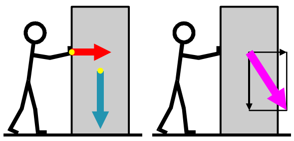
Két aktív erő is kiegyenlítheti egymást, például egy harapófogóban.

Egy **sík felület**, például egy fal vagy egy lejtő által kifejtett **ellenerő mindig a síkra merőleges**.

Eredő erő

Newton IV. törvénye szerint

> **Ha egy testre egyidejűleg több erő hat, akkor azok a számításokban egyenértékűen helyettesíthetők egyetlen erővektorral, amely a többi erővektor matematikai vektorösszege, a fizikában használt szóval EREDŐJE.**

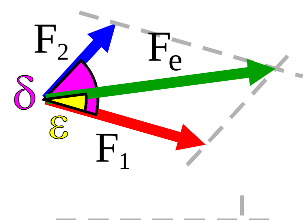


Nézd meg a rajzot: a szekrény súlyereje a tömegközéppontjában "támad" (kék), a te támaszkodó erőd viszont ott, ahol nyomod a szekrényt (piros). A két vektor összege, eredője a lila nyíl, amely a te erődet és a szekrény súlyerejét együttvéve a törvény értelmében egyenértékűen helyettesíti. Meg fogod tanulni, hogy ez a helyettesítés mikor és mire használható.

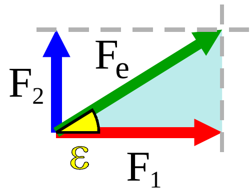
Az eredő nagyságát és irányát nekünk kell kiszámítanunk. Három esetet kell megkülönböztetnünk: az egyszerű esetben a vektorok szöget zárnak be egymással, a hatásvonaluk metszi egymást. A második esetben a vektorok hatásvonala egybeesik, a harmadik esetben a hatásvonalak párhuzamosak.

Több erővektor eredője úgy állítható elő, hogy megtaláljuk két erő eredőjét, majd annak és a harmadik erőnek az eredőjét és így tovább.

1. eset: szöget bezáró erők. Az eredőt formailag egy szerkesztéssel találjuk meg. Ez azzal kezdődik, hogy ha a vektorok kezdőpontjai nem esnek egybe, akkor a hatásvonalaik mentén eltoljuk őket. **Eredőt szerkeszteni csak úgy lehet, ha mindkét vektor közös pontból indul.** Az előbb a szekrényre ható erőket is eltoltam, láthatod a második képen a vázlatát. Tekintsd meg a könyv végén levő VEKTORMŰVELETEK fejezet.



Két vektor eredőjének megtalálásához a két vektorból egy parallelogramma két oldalát hosszuk létre, és az eredőjük ennek a parallelogrammának a közös kezdőpontból induló átlója. Kicsit bővebben: mindkét vektor (F_1 és F_2) *végpontjából* segédvonalakat húzunk a másik vektor vonalával párhuzamosan, és a két segédvonal metszéspontja jelöli ki az eredővektor (F_e) végpontját. Az eredő kezdőpontja pedig egybeesik a másik két vektor kezdőpontjával.



Az eredő erő vektora ezután a saját hatásvonalában szintén eltolható, ha kell.

A módszert **parallelogramma-szabály**nak hívjuk.

A számításhoz képletekre van szükséged, ezek a koszinusz-tételből és a szinusz-tételből vezethetők le, matekból tanulni fogod. *Ha ezeket nem kérik tőled, akkor kihagyhatod.*

Ismert $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$, valamint az általuk bezárt δ szög. Általános esetben **az eredő nagysága**:

$$F_e = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\delta}$$

Ha a két vektor derékszöget zár be, akkor létrejön egy jól ismert derékszögű háromszög, és mivel **cos 90°=0**, a képlet a PITAGORASZ-TÉTELre egyszerűsödik (hasonlítsd össze az előzővel):

$$F_e = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}}\ .$$

Az eredő irányát valamelyik erőhöz viszonyítva adjuk meg. Az $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_e}$ által bezárt $\boldsymbol{\varepsilon}$ szög kiszámítása:

$$\boxed{\sin\varepsilon = \frac{F_2}{F_e}\cdot\sin\delta \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon = \arcsin\left(\frac{F_2}{F_e}\cdot\sin\delta\right)}$$

Derékszöget bezáró erőknél δ=90° (nézd a képet), és **sin 90°=1**, ezért az eset ismét egyszerűsödik:

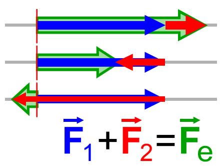
$$\sin\varepsilon = \frac{F_2}{F_e} \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon = \arcsin\frac{F_2}{F_e}\ .$$

A könyv végén a SZÖGFÜGGVÉNYEKről is találsz összefoglalót.

A képleteket a rajzzal együtt tanuld meg, mert ha a feladatban másképp vannak az erők, akkor a képletet ahhoz igazodva kell értelmezned!

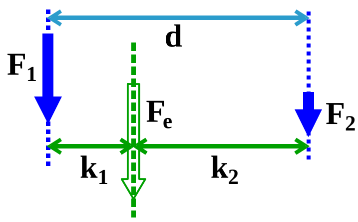
Az eredő szerkesztésekor mi az első lépés? Honnan húzod a párhuzamost? Mivel párhuzamos?

2. eset: az erők hatásvonala egybeesik. Ekkor a vektoroknak összesen kétféle iránya lehet, amit előjellel különböztethetsz meg egymástól. A teendő egyszerű: összeadod a hosszukat, *figyelve az előjelre*. Az ábrán mindig a zöld vektor a kék és a piros összege, mutatok különféle példákat azonos és ellentétes irányba eső vektorokkal is. Azt kell észben tartanod, hogy ha egymáshoz illeszted az összeadandó vektorokat, akkor az eredővektor kezdőpontja az első erővektor kezdőpontja lesz.



Párhuzamos hatásvonalú erők eredője

Nézzük az eredőszámítás harmadik esetét. **Adott két erő ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$), amelyek hatásvonalai egymással párhuzamosak**, a távolságuk $\mathbf{d}$. Keressük a két erő eredőjét.



Az eredő két adatát (nagyság és hatásvonal) külön-külön tudjuk meg. Az eredővektor **nagysága** az erők nagyságának előjeles összegével egyenlő, úgy, mint ha a két erő hatásvonala egybeesne.

Az eredő hatásvonala párhuzamos az erőkkel. A hatásvonal **helyét** úgy kell kiszámítani, hogy érvényes legyen rá az alábbi képlet:

$$\boxed{|F_1\cdot k_1| = |F_2\cdot k_2|}$$

ahol F-fel az erőket, k-val az eredő erőtől leendő távolságukat jelöltük. Hasonlít a képlet a TÖMEG-KÖZÉPPONT számításának képletéhez, és még jobban fog hasonlítani az egyensúlyban levő mérleghinta forgatónyomaték-egyenletéhez, hamarosan jön. Azért kell a szorzatok abszolút értékét venni, hogy se az erővektorok iránya, se a *forgató* hatásuk előjele ne zavarjon bennünket a karok arányának kiszámításában. A képlet ezért akkor is működik, ha a két erő iránya ellentétes.

Az eredő hatásvonala tehát oda kerül, ahol a mérleghinta alátámasztása lenne az egyensúly megtalálása után. **Az eredő mindig a *nagyobb* erőhöz van közelebb.**

Ahogy az egymást metsző hatásvonalú erők eredőjének szerkesztésére használt módszer neve parallelogramma-szabály, úgy a párhuzamos hatásvonalú erők eredőjének meghatározására használt szabály neve **mérleghinta-szabály**.

Ennek az egyenletnek két ismeretlenje van (k_1, k_2), ezért kell egy második egyenlet: $k_2 = d - k_1$.

Ebből kijön, hogy $k_1 = \dfrac{F_2\cdot d}{F_1 + F_2}$, végül visszahelyettesítesz az első egyenletbe, hogy megkapd k_2-t is.

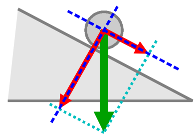
> Ha ilyen példát kell kiszámolnod, akkor nem kell pánikba esni. Készíts egy jó vázlatot, írd fel az alapképletet a megfelelő jelölésekkel, írd le, hogy mit kell kiszámolnod. A pontok felét talán már megkapod ezért. Ezután egy kétismeretlenes egyenletet kell megoldanod. Ha sikerül ehhez hasonló jó második egyenletet felállítanod az egyik ismeretlenre, akkor végül is sínen vagy, próbálkozz, és jutsz, ameddig jutsz. Ha nem megy, és más dolgod is van még, akkor lépj tovább.

Az eredő erőnek így a nagyságát, irányát (előjel) és a hatásvonalát kaptuk meg. Hogy ebben a vonalban az eredővektort végül hová toljuk el, hová helyezzük a kezdőpontját, az a helyzettől, a feladattól függ. Ha egy feladat nem a két erőt adja meg, akkor sajnos matekozni kell, de maga *a képlet ugyanaz*.

Az eredő erőkomponensei

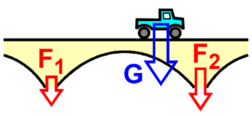
Newton IV. törvénye megfordítható:

Minden erővektor helyettesíthető két olyan vektorral, amelyeknek ez az erő az eredője.



A parallelogramma-szabályt használjuk "visszafelé", figyeld a sorrendet: adott az F_e (zöld). **Mi találjuk ki**, hogy a két vektorösszetevő (más szóval ***komponens***) hatásvonala hol legyen, aszerint, hogy az adott esetben mi a célravezető. Berajzoljuk a vonalakat (kék). Az F_e hegyétől párhuzamosokat húzunk (cián) a berajzolt hatásvonalakkal, ezek kimetszik a vektorok végpontjait. Végül a hatásvonalakon a metszéspontokig meghúzzuk az összetevőket (piros). Mindig ellenőrizd a parallelogramma-szabállyal, hogy az eredeti vektor valóban eredője legyen a két kapott vektornak!

Egy vektorhoz végtelen sok összetevő-páros található, azért, mert a két komponens számára bármilyen irányba kijelölhetjük a hatásvonalakat. Te úgy választod ki a megfelelőt, hogy valamilyen gyakorlati szempont alapján előre kijelölöd a két összetevő hatásvonalát. A feladatokban gyakran az bizonyul célszerűnek, hogy a két komponens merőleges legyen, de lehet, hogy az egyik komponensnek a vízszintes irány kötelező, vagy a függőleges, vagy a test mozgásának iránya stb., majd meg fogod látni.



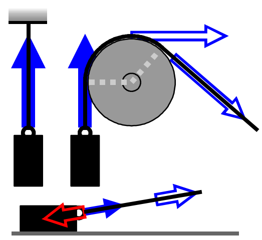
Az erő persze párhuzamos komponensekre is felbontható, csak a távolságukat kell kitalálni. Egy hídon áll egy teherautó. A híd lábai a talajra nehezednek, hordozva a híd súlyát. A teherautó súlya (G) ehhez hozzáadódik, azt is a talajnak kell megtartania, a híd közvetítésével. F_1 és F_2 eredője, az F_e itt a G súlyerő, az alapképlet most is a mérleghinta-szabály. Valójában csak más adatokat ismerünk belőle. Az egy eredő kétfelé történő párhuzamos felbontásának elve a **híd-szabály**.

Kényszererő

Szabaderőnek nevezzük azokat az erőket, amelyek hatására egy test szabadon elmozdulhat. Ha egy *kényszer* ezt a mozgást korlátozza, akkor a mozgás *kényszermozgás*. A kényszert létrehozó erő **kényszererő**. A kényszererők egy része egy erő ellenerejeként születik.

Ha egy golyót egy lejtőre teszünk, a golyót lefelé húzza a súlya, de a lejtő a mozgását másfelé erőlteti. A lejtő által a golyóra gyakorolt nyomóerő kényszererő. A bennünket tartó szék megakadályozza, hogy mi leessünk arra, amerre a súlyunk húz, tehát a szék által ránk gyakorolt tartóerő is egy kényszererő. A körmozgás során a testet egy erő húzza befelé, ez kényszeríti a körpályára, ez is kényszererő.

Kötélerő

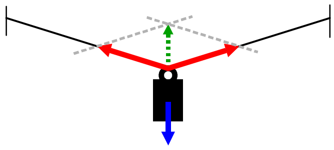


A kötél (fonál) olyan test, amely révén erő továbbítható. Ha a kötelet meghúzod az egyik végén, akkor az továbbadja a húzóerőt a másik végén annak a testnek, amelyhez kötve van. (Ettől a test nem feltétlenül mozdul el, lehet, hogy így tartasz valamit.) Ez akkor is így történik, ha a kötél nem egyenes, hanem csigán vagy kötéldobon van átvetve. Kötéllel nem tudunk eltolni egy testet, ahogy egy bottal, *a kötél csak húzni tud*. Az egyenes kötél által létrehozott húzóerő hatásvonala a kötél vonalában van. Ha a kötél nem egyenes, akkor a hatásvonal minden pontnál a kötél *érintője*. A kötélre nem lehet forgatónyomatékot (lásd később) kifejteni, mert a kötél nem szilárd test.

Ha egy kötél erőt fejt ki egy testre, akkor a hatás–ellenhatás törvénye szerint a test is erőt fejt ki a kötélre, ellentétes irányban, a kötelet húzva, (piros nyíl). Ettől a kötél el is szakadhat.

Ha egy feladat nem foglalkozik vele külön, akkor az ott használt "ideális" kötelet végtelen szakító-szilárdságúnak, súrlódásmentesnek, tömeg nélkülinek (tehát akadálytalanul gyorsulónak és saját súly nélkülinek) és vonalszerűen vékonynak vesszük, ezért ilyenkor nem is tekintjük testnek.

Példa: **szerkesszük meg azt a két erőt, amely a szárítókötélben ébred a középre akasztott test súlyának kiegyenlítéséül.** Csak a kék súlyerőt ismerjük, de a test mozdulatlanságának kötelező feltétele, hogy azt kiegyenlítse egy ugyanakkora (zöld) tartóerő, amelyről tudjuk, hogy függőleges, és azonos nagyságú a test súlyerejével. Ez azonban csak a kötélben ható húzóerőkből adódhat össze, mert a testet a gyakorlatban ezek tartják. Akkor pedig a két erőkomponens *a kötél vonalában van*, ahogy a kötélerőnél ez törvényszerű. Ideiglenesen berajzoljuk a zöld tartóerőt, a csúcsából a párhuzamosok megrajzolásával pedig megkaptuk a piros erőkomponensek hosszát. A kék erővel a két piros erő tart egyensúlyt.



Tömegvonzás, gravitáció

A tömeghez, halmazállapotától és mennyiségétől függetlenül, elválaszthatatlanul hozzátartozik egy belőle származó erő, a tömegvonzás, más szóval gravitáció. Ez a hatás a jelenlegi ismereteink szerint gömbszimmetrikus, nem árnyékolható, nem téríthető el, nem növelhető vagy csökkenthető, és csak a végtelenben csökken nullára. **A tömegvonzási erő két tömeg között jön létre:**

$$F_{grav} = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ahol $\mathbf{m_1}$ és $\mathbf{m_2}$ a két test tömege, $\mathbf{r}$ a *tömegközéppontjuk* közötti távolság, $\mathbf{f}$ pedig a gravitációs állandó, amelynek értéke:

$$f = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

(Más helyeken az $\mathbf{f}$ helyett $\mathbf{G}$-vel jelölik, de ez keverhető a súlyerő jelével.) A nagyságrendje csak 10^{-11}, százmilliárdod. Ezt azt jelzi, hogy már egy kis gravitációs erőhöz is jó nagy tömeg kell.

Az f mértékegységét nem kell megtanulnod, ha le tudod vezetni a képletből. (MÉRTÉKEGYSÉGEK fejezet)

Sose tanulj be képletet úgy, hogy nem tanulod meg hozzá: „… ahol ez jelenti ezt, az jelenti azt". Lehet, hogy egy feladatban más betűkkel vannak jelölve mennyiségek, esetleg egy ismert betűt más dolog megjelölésére használtak (idegen nyelvű szövegekben is előfordul ilyen), és ha csak mész a betűk után, ráfaragtál. A megtanult képletet egy megoldás közben, ha kell, írd le magadnak oldalra, elkülönítve, nem tilos, és gondold át, hogy az aktuális esetben mi mit jelöl, ezek után folytasd úgy, hogy a betűk helyére értelemszerűen helyettesíted be a feladatban használt betűket, értékeket.

A tömegvonzás egyenesen arányos a testek tömegeivel, kétszer akkora test tömegvonzása kétszer akkora. Viszont négyzetesen és fordítottan arányos a távolsággal, tehát ha a távolságot háromszorosra növeljük, a tömegvonzás 1/9-szeresére *csökken*. (3^2=9) Ha majd a Föld gravitációját kell számolgatnod, ne felejtsd el, hogy a felszínen levő test távolsága *nem nulla*, hanem 6373 km, mert a vonzást a Föld tömegközéppontjától kell mérni.

A hatás–ellenhatás törvényéből következően te pontosan akkora erővel vonzod a Földet, mint amennyivel az vonz téged. A két erő vektora a két tömegközéppontot összekötő egyenesre illeszkedik.

A tömegvonzás hatását közvetítő közegként egy régebbi, de még mindig kutatás alatt álló elmélet gravitonnak nevezett, még felfedezetlen részecskéket feltételez. Az általános relativitáselmélet szerint viszont a tömeg **a tér meggörbítésével** fejti ki vonzásszerű hatását.

Newton nem azt fedezte fel – a mese szerint –, hogy az alma leesik, hanem arra jött rá, hogy ez az unalmas jelenet úgy is nézhető, hogy a Föld vonzza magához az almát. A továbblépéshez a teret ez a másképp látás nyitotta meg. Mert akkor a Föld a túlsó felén is csak *maga felé* vonzza az almát, megválaszolva a régi kérdést, hogy onnan miért nem esnek le az emberek.

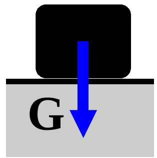
Mekkora tömegű test hoz létre 1 méter távolságból 1 N tömegvonzási erőt? Gondolkozz **…**

A kérdés *hiányos*, ezért megválaszolhatatlan. A tömegvonzási erő *két* test tömegétől függ, a képletben is láthatod. (És a tömegvonzás nem mindig a Földről szól.) Vagyis ha egy tankhajónak y tömegvonzási ereje van egy adott távolságban levő 1 kg-os testre, akkor 20y vonzereje lesz egy ugyanott levő 20 kg-os testre. Mindig meg kell adni azt is, hogy mekkora tömegre gyakorolt tömegvonzási erő a kérdés.

Pontosítok: mekkora tömegű test hoz létre 1 méter távolságból 1 N tömegvonzási erőt egy 1 kg tömegű testen? A képletben most F, m_1 és r értéke is 1, a számítás nagyon egyszerű: $m_2=1/f=\underline{1{,}493\cdot 10^{10}}$ kg, durván 15 millió tonna. És egy 100 kilós emberen? Csak *150 ezer* tonna. **Gondold át!**

Nehézségi erő

Ha egy test a Föld (vagy más égitest) közelében van, akkor nézhetjük úgy a helyzetet, hogy a Föld van *lefelé*. Ilyenkor azt az erőt, amivel a Föld a testet vonzza, **nehézségi erő**nek hívjuk. Ez az erő egyenesen arányos a test tömegével, és **a testre** hat. A jele $\mathbf{G}$, a mértékegysége newton. A hatásvonala függőleges, az iránya lefelé mutat, a támadáspontjának a test tömegközéppontját tekintjük.



$$G = m \cdot g$$

ahol $\mathbf{m}$ a test tömege (kilogrammban), a $\mathbf{g}$ (az ún. nehézségi gyorsulás) értéke ~**10** N/kg, lásd később.

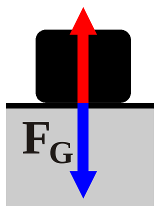
A tömegvonzási erő a testek tömegközéppontja közötti távolságtól is függ, ezért a testre ható nehézségi erőt befolyásolja az is, hogy a mérés milyen magasságban történik. A Föld sugara 6373 km, így 10 km magasan a nehézségi erő a tengerszinten mérhetőnek 99,687%-a. Számold ki te is.

Ha azt mondjuk, hogy "a test nehézségi ereje", akkor is **a testre ható** nehézségi erőről beszélünk. **A nehézségi erő hozza létre a súlyerőt.** Később majd látni fogod, hogy a súly "eltűnhet", de a nehézségi erő *mindig* megmarad.

Súlyerő

Egy test súlya az az erő, amivel a mozdulatlan test az alátámasztást vagy felfüggesztést nyomja.

Minden testnek van (vagy lehet) súlya. **A súlyerő forrása a test nehézségi ereje**. A nehézségi erő hat a testre, a súlyerő hat az alátámasztásra. A hatás–ellenhatás törvénye szerint a test által nyomott alátámasztás is nyomja a testet, egy ugyanakkora ellenerővel. Látod az előző és a mostani kép közötti különbség*ek*et? A feladatokban néha az egyik, néha a másik jellegű ábrát fogod látni, vagy éppen megrajzolni, attól függően, hogy éppen mi a lényeg. Szokás a test súlyát csak jelzésszerűen úgy ábrázolni, ahogy a nehézségi erőnél látod.



A súlyerő jele $\mathbf{F}_G$, de a legtöbbször ezt is $\mathbf{G}$-vel jelölik. A mértékegysége newton. Általában elfogadható a két fogalom összemosása, de próbáld figyelni a különbséget.

Vannak ugyanis esetek, amikor a súlyerő eltér a nehézségi erőtől, esetleg nullára csökken, de ehhez a testnek bizonyos fajtájú *haladó* mozgást kell végeznie, és ide tartozik az az eset is, amikor a test egy űrhajóval együtt a Föld körül kering. Erről egyelőre elég ennyit tudnod. **Amikor a test mozdulatlan, akkor a súlyerő megegyezik a nehézségi erővel:**

$$F_G = G$$

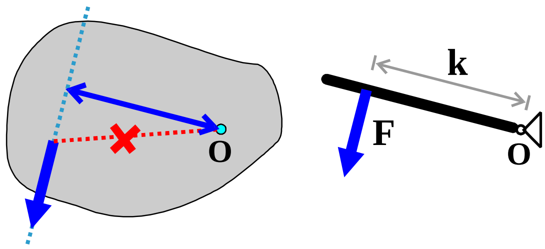
A súly az erő egyik előfordulási formája. Ebből következően *a súly mértékegysége* *nem* *kilogramm,* *nem* *tonna*, mert azok a tömeg mértékegységei. A két fogalom fizikapéldákban történő összekeverése kapásból egy jegy levonás.

A hétköznapi életben a newton alkalmatlannak bizonyult a súly megadására, amit nem csodálhatunk, ha azt vesszük, hogy egy **1 kg tömegű test szabványos súlya tengerszinten 9,80665 N (~10 N)**. A feladatokban többnyire megengedett a kerekítés. A régi mértékegységgel ugyanez a súly 1 kilopond volt, de ezt az SI hatályon kívül helyezte. A feladatmegoldásokban ragaszkodni kell a newtonhoz *minden* erő, így a súlyerő megadásakor is, különben a számítások hibásak lesznek.

Forgatónyomaték

Ez egy nagyon fontos, sokszor visszatérő téma, ezért alaposan kitárgyaljuk. Figyelj fel arra, hogy fejezeteken át *egyetlen képletet* használunk, és csak megtanuljuk, mi a haszna különféle helyzetekben.

Ha egy szilárd test egy pontját csuklóval vagy tengellyel rögzítjük úgy, hogy a test e pont körül el tud fordulni, akkor a testre ható erő a test elforgatására törekedik. A **forgáspont**ot többnyire O-val jelöljük.



Tapasztalatból tudjuk, hogy **egy erő elforgató hatása nagyobb akkor, ha az erőt megnöveljük, és akkor is, ha az erőt *a forgásponttól távolabb* alkalmazzuk.** Ezért készítenek hosszú nyelet például egy erős kábelek elvágására való szerszámnak vagy egy villáskulcsnak, feszítővasnak, krumplinyomónak.

Az erő elforgató hatását kifejező mennyiség neve forgatónyomaték.

Erőkarnak hívjuk az erővektor hatásvonalának merőleges távolságát a forgásponttól. *Nem* a támadáspont és a forgáspont közötti távolság számít.

Az M forgatónyomaték egyenesen arányos az F erővel és a k erőkarral, azaz

$$\mathrm{M} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{k}$$

A forgatónyomaték mértékegysége, a képletből is következően a **newtonméter**:

$$[\mathrm{M}] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

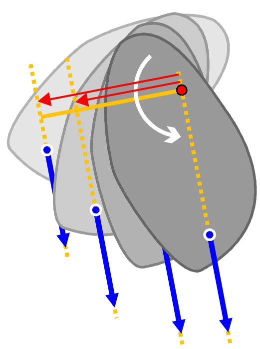
A forgatónyomaték mindig egy adott forgáspontra vonatkozik. Ha a forgáspontot áthelyezzük, megváltozik a forgatónyomaték is.

A feladatok megoldásakor a szilárd testet helyettesíthetjük egy súly nélküli, vékony, végtelenül teherbíró rúddal, amelynek egyik vége a forgáspontban csuklósan van rögzítve, az ábrán láthatod. Az a legjobb, ha a rúd merőleges az erővektor hatásvonalára, ilyenkor tulajdonképpen az erőkar helyére kerül. Figyeld meg, hogy a rajzon a rúd hosszabb, de ez nem számít, mert **az erőkar igazi hosszát az erővektor helye, hatásvonala határozza meg**. Maga a test valójában lehet akár perec alakú is, ahol a forgáspontból induló egyenes nem marad végig a testen belül, merev testnél ez nem érdekes.

Ha egy erő hatásvonala átmegy a forgásponton, akkor az erőkar hossza, azaz a k távolság 0, tehát az erő forgatónyomatéka is 0.

Ha a forgáspont rögzített, akkor a testnek az a pontja nem mozdítható el, csak forgatható. De a forgáspont nem mindig van rögzítve úgy, mint egy fogó szárainál vagy egy ajtónál. Ha egy fekvő gerenda egyik végét felemeljük, akkor időlegesen a másik, a földre támaszkodó végéből lesz ***eseti* forgáspont**. Amikor eltörünk egy botot, akkor a törés helye viselkedik eseti forgáspontként. Ha egy olyan test forog, amelynek nincs sem rögzített, sem eseti forgáspontja, akkor a forgás tengelye a test tömegközéppontján megy át.

Ha egy merev, elfordulni képes testen egy erővel forgatónyomatékot hozunk létre, akkor a test a nyomaték irányába elfordul. Ha az elfordulás közben az erő iránya nem változik, akkor az erő hatásvonala egyre közelebb kerül a forgásponthoz, és egyre rövidebbé válik az erő erőkarja. Figyeld meg.

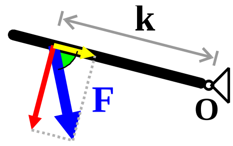


A test addig fordul a nyomaték irányába, amíg az erő hatásvonala át nem megy a forgásponton, ekkor az erőkar és forgatónyomaték 0-ra csökken, a test *egyensúlyba* kerül.

Ha az erő iránya követné az elfordulást, akkor az erőkar nem változna, a hatásvonal sosem érné el a forgáspontot, ezért a test nem kerülne egyensúlyba, hanem (egyre gyorsabban) forogna.

Milyen nekünk fontos dolog változik az elforgatás közben?

Ha a feladat elemzése, a vázlat elkészítése közben úgy alakul a helyzet, hogy az F erő nem merőleges erre az egyszerűsítésként használt elméleti rúdra, akkor sincs semmi baj. *A rúd nem maga az erőkar*, hanem csak helyettesíti a testet. **Az erőkar egy távolság.** Az EREDŐ ERŐKOMPONENSEI fejezetből tudjuk, hogy ez az erő egyenértékűen helyettesíthető két másik erővel, amelyeknek az F az eredője. Jó okunk van arra, hogy az egyik összetevőt (piros) a rúdra merőlegesen vegyük fel: az erőkar ettől a rúd vonalába kerül, tehát kényelmesebb elképzelni. Ha a másik összetevő (sárga) a rúdba kerül, az azért nagyon jó nekünk, mert így a hatásvonala átmegy a forgásponton, tehát a forgatónyomatéka nulla, vagyis többet nem is kell vele foglalkoznunk. Derékszögű háromszöggel mindig könnyebb számolni, a SZÖGFÜGGVÉNYEK és a PITAGORASZ-TÉTEL használatával. Ezekről a könyv végén olvashatsz, tanuld meg őket tökéletes biztonsággal. Sokszor lesz rájuk szükséged.

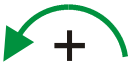


Remélem, megkérdezted magadtól, hogy ez a sárga erő magával a rúddal mit fog csinálni, mert egy erőt általában nem lehet csak úgy elhanyagolni, lehet egy feladatban akár egymillió newton nagyságú is, elvileg. Nos, az ilyen elméleti rúdról azt feltételezzük, hogy nem lehet sem összenyomni, sem megnyújtani, sem meghajlítani, vagyis *ideálisan merev*. Így aztán ez a sárga erő nem csinál vele semmit.

A piros és a sárga erőkkel *helyettesítjük* a kék F erőt, tehát egy feladatban innentől úgy kell számolni, hogy a kék erő már nincs, van helyette a piros és a sárga, és a sárga érdektelen, marad a piros.

Hogy a piros és a sárga erő, tehát az F két komponense *mekkora*, az külön probléma. Ha ismered az F erőnek a rúddal bezárt α szögét (zöld), akkor a piros lesz az $F \cdot \sin \alpha$, a sárga az $F \cdot \cos \alpha$.

Miért így vettük fel az F-et helyettesítő erővektorokat?

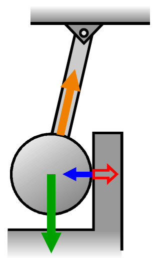


A forgatónyomaték **irányított mennyiség** (de nem vektor), így az értékének **előjele** is van. Pozitív iránynak az óramutató járásával ellentétes forgási irányt vesszük.

Ha egy forgáspontban rögzített testre több erő is hat, akkor mindegyik saját forgatónyomatékot hoz létre.

Több erő közös forgatónyomatéka egyenlő az egyes forgatónyomatékok előjeles összegével.

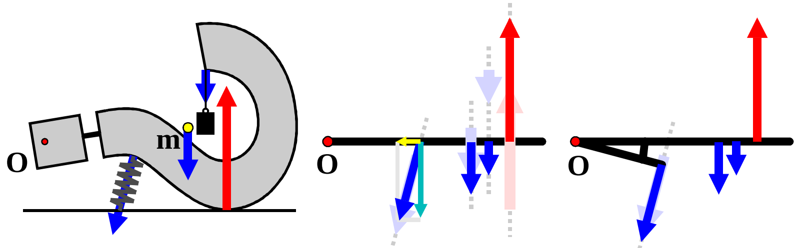
Ne felejtsd el: **összeadnod csak azokat a forgatónyomatékokat szabad, amelyeket *ugyanarra a testre* ható erők hoznak létre.** Ha az elforduló test támaszkodik egy másik testen, akkor nem szabad beleszámolni azt az erőt, amivel ez a test *a másikat* nyomja, ilyen a piros nyíllal jelölt erő. Ugyanakkor bele *kell* számolni azt az ellenerőt, amivel a másik test ezt a testet nyomja, ez a kék nyíl. A zöld és a kék erőnek is van forgatónyomatéka a forgáspontra vonatkoztatva, a sárga átmegy a forgásponton, a piros másik testre hat.



Példa. Nézzünk meg együtt egy olyan esetet, amiben ezeknek az elvi részleteknek a használata mind megfigyelhető. Nem nehéz, de olvasd figyelmesen.

A képen látható, elég homályos célú szerkezetre összesen négy erő hat: a saját súlyereje az itt **m**-mel megjelölt tömegközéppontban, egy rá akasztott súly ereje (érted a különbséget a két írásmód között?), egy rugó húzóereje és az alátámasztás nyomóereje. **A feladat most csak *az ábra egyszerűsítése*.**

Maga az O tengely is kifejt egy erőt a testre, de mivel a forgatónyomatéka annak automatikusan nulla – hiszen a hatásvonala átmegy a tengelyen –, más pedig most nem is érdekel bennünket, ezért be sem rajzoltam. Később látsz egy olyan példát is.



No kérem szépen, az első pánik már el is múlt, akkor most szórjunk ki minden fölösleges dolgot. **Helyettesítsük a testet** a forgáspontban rögzített, saját súly nélküli, tökéletesen merev, egyenes rúddal. Ennek az iránya *tetszőlegesen* megválasztható, de mivel a forgatónyomatékok számolgatásakor az erők hatásvonalaira húzott merőlegesekkel dolgozunk, és itt három erő is függőleges, ezért az a leg*kényelmesebb*, ha a rudat vízszintesen vesszük fel, és akkor pont egybeesik három erőkarral is, az O ponthoz viszonyítva.

Miért függőleges a talaj nyomóereje? Mert **a nyomóerőt mindig a felületre merőlegesnek vesszük**.

Van négy erőnk, ebből a három kék erő fix, a piros erő viszont ezek hatására indukálódó ellenerő, ezért ennek a nagysága az egyetlen bizonytalan érték, egy feladat is valószínűleg ezt kérdezné. De a számértékekkel most nem foglalkozunk.

Felvettük tehát a képzeletbeli rudat, és ezután az erővektorokat eltologatjuk a saját hatásvonaluk mentén úgy, hogy mindegyiknek a támadáspontja a rúdra kerüljön. Három erő máris merőleges, vagyis a hozzájuk tartozó erőkarok a rúd vonalába esnek.

Miért fontos ez? Igazából nem fontos, de talán eleinte a testet egyben, egy merev rúddal helyettesítve szeretjük elképzelni, azért, mert az segíti a helyzet pontosabb átlátását. Ez kézzelfoghatóbbá teszi számunkra a forgatónyomatékokat. Később ettől már el lehet rugaszkodni. Most mindenesetre három erőkar is a rúdban van, el tudod képzelni, hogy három erő is egymással versengve nekinyomódik egy rúdnak, amely a végén egy csuklóval van rögzítve a falhoz. Így talán egyszerűbben megállapítható az erőkarok aránya, esetleg a pontos hosszuk is, és a megoldásokhoz mindig erre van szükségünk.

Az erőkar csak egy képzeletbeli vonal, egy fogalom, egy távolság, az erő merőleges távolsága a forgásponttól, és nem kell anyagi testnek, rúdnak lennie, csak annak képzeljük el.

A negyedik erőt, a rugó erejét is eltoltuk kicsit, de ez nem merőleges a rúdra. Ha azt szeretnénk elérni, hogy minden erőhöz tartozó erőkar a rúd vonalában legyen, akkor két dolgot lehet csinálni.

Az egyik az, hogy a rugótól származó ferde erővektort felbontjuk egy rúd irányú és egy rúdra merőleges összetevőre, ezt bármikor megtehetjük, ha így kényelmes, az előbb már csináltunk ilyet. A rúd irányú összetevő (sárga nyíl) forgatónyomatéka nulla, ezért többet nem is törődünk vele. A másik összetevő erőkarja a rúdba került, ez volt a vágyunk, a hosszát az erőnek a rúddal bezárt szöge alapján pontosan ki is számolhatnánk: az arány a szög szinusza.

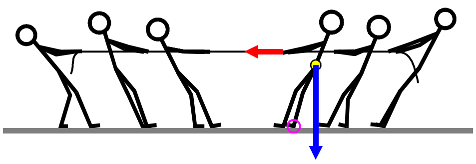
Erről a szinuszról az előbb volt szó. Hasonlítsd össze az ábrákat!

A másik lehetőség az, hogy a rugóerő ferde vektorához *egy másik rudat is* beépítünk a rendszerünkbe, amely merev egységet alkot az első rudunkkal. Ez egyáltalán nem tilos, a vizsgált test maga is merev, szilárd test volt, a két rúdból álló is az. (Rajzoltam közéjük egy "merevítő" elemet is, csak segítségül.) Ha valamiért úgy kényelmes nekünk a helyzetet elképzelni, akkor mindenféle erőkhöz egy-egy saját rudat is felvehetünk, mindegyiket a forgáspontból indítva. Úgyis csak annyi szerepe van, hogy megfoghatóvá teszi számunkra az erőkarokat. Amint látható, ezzel a rugó erejéhez tartozó, az erővektor hatásvonalára merőleges erőkart kaptunk, amivel a számolást a kapott adatok szerint már könnyebben elvégezhetjük.

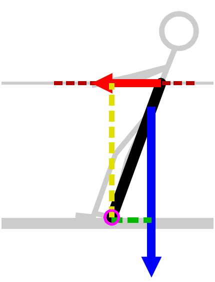
A két módszer matematikailag egymásból levezethető, tehát egyenértékűek, *bármelyiket választhatod*. Az erőkarok hossza a feladatban megadott adatokból derül ki. Mindegyik erőnek van egy forgatónyomatéka, és szükség esetén ezek a forgatás iránya szerinti előjelekkel összeadhatók. A példán a három kék erő nyomatéka negatív, a piros nyomatéka pozitív.

Most semmilyen számítást nem végeztünk. Csak láttál egy példát egy zűrös ábra egyszerűsítésére.

Ez egy olyan eset, amikor döntened kell, hogy a lehetőségek közül melyikkel élsz. A feladatok megoldásának (erős ütemű) gyakorlása során fogod megszokni azt, ahogy egyre jobb leszel, hogy te milyen helyzetre miféle megközelítést tartasz a magad számára legkényelmesebbnek.



Ezek a kötélhúzók még egy példát mutatnak arra, hogyan lehet a lényegét kiemelni egy erőtani helyzetnek. Mindegyik emberről elkészíthető lenne lényegileg ugyanez az ábra, de én téged emellek ki közülük.

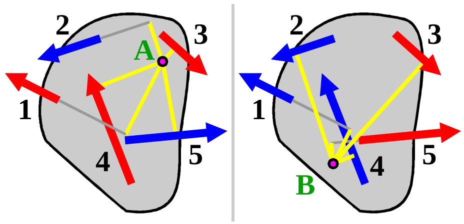


A célod az, hogy a kötelet minél nagyobb erővel húzd. Ennek az erőnek a forrása viszont csak a súlyod lehet, más nincs. Jól megveted a lábadat, megfogod a kötelet, majd hátra dőlsz. A kinyújtott testű ember tömegközéppontja körülbelül a köldökénél szokott lenni. (Mély guggolásban vagy zsugorszaltóban eltolódik a gyomorszáj környékére.) Ezzel a hátradőléssel a tömegközéppontodban ható nehézségi erőnek (kék) egy erőkart hozol létre a forgáspontként működő sarkadtól (zöld). Te erőt gyakorolsz a kötélre, de Newton III. törvénye szerint a kötél ellenerőt gyakorol rád. Ismét emlékeztetlek, hogy bár jellegzetesebb, lényegesebb az az erő, amivel te húzod a kötelet, mégsem szabad összevegyítened olyan erőket, amelyek nem ugyanarra a testre hatnak. *Rád* a kötél ellenereje hat, és hiba lenne a piros nyilat ellenkező irányba rajzolni.

A tested felfogható egy merev rúdként, amelyre két támadáspontban egy-egy erő hat. Láthatod, hogy ha jobban hátradőlsz, a nehézségi erő erőkarját megnöveled, ráadásul a rúddal bezárt szöge is kedvező irányba változik. Ennek eredményeként a rúd nagyobb erővel próbál negatív irányba elfordulni, azaz nagyobb kötélerő kell a megtartásához, erősebben húzod a kötelet. Hogy az a rúd merev legyen, arról úgy gondoskodsz, hogy az izmaidat megfeszíted. Ha a piros és kék erő eredője, amely kiegyensúlyozott helyzetben pontosan a rúd irányában hat, erősebbnek bizonyul az izmaidnál, akkor összerogysz.

A forgatónyomaték fogalma elő fog kerülni a *Körmozgás* témakörben is.

Forgatónyomatékok összege



Az ábrán egy testre 5 erő hat, mindegyiknek forgatónyomatéka van az *A* forgáspontra, néhány pozitív, néhány negatív irányú. Jelöljük indexelt M-mel mindegyiket (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5), írd fel az öt forgatónyomaték <u>összegét</u>! **…**

Mutatom a megoldást: $\mathbf{M_{össz}=M_1+M_2+M_3+M_4+M_5}$.

Van valami probléma? Hiányolod a mínuszokat? Elhiszem. De a fizikát csak akkor támogatja a matek, ha a matekot pontosan használjuk. Mi a *jele* az 1. erővektor által létrehozott forgatónyomatéknak? M_1. Azt mondtam, hogy „a forgatónyomaték *értékének* előjele is van”. Az 1. erő nyomatéka negatív irányú, tehát lehet például $M_1=-37$ Nm. Látod, ott van az a negatív előjel. Vagyis az M-ek lehetnek pozitív és negatív számok is (és nulla is), amelyek összege ettől még <u>összeadással</u> számítandó ki. Összeg: összeadás. Erre mondom azt, hogy a matek eszközeit pontosan kell használni, egy egyenlettel is így szoktunk bánni.

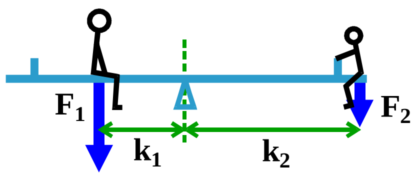
Az előjel a számértékbe kerül. Csak kitalált számértékekkel felírom neked a forgatónyomatékok összegének, az $M_{össz}$-nek a kiszámítását erre az esetre: (−37)+(+20)+(−8)+(−102)+(80). Összesen −47, tehát a testre ezek az erők együttesen egy negatív irányba ("jobbra") forgató nyomatékot hoznak létre. Kész.

Csakhogy lehet, hogy ti másképp csináljátok. A tanárnak lehet az az igénye, hogy a számítási képlet leírásakor már lássa, hogy melyik erőnek milyen irányú a forgatónyomatéka, pontosabban lássa, hogy te látod. Ezért lehet, hogy neked így kell leírni az első képen levő erők forgatónyomatékainak összegét: $\mathbf{M_{össz}=-M_1+M_2-M_3-M_4+M_5}$. Ahhoz, hogy ez a képlet matematikailag helyes legyen, <u>hozzá kell tenni</u> azt a kikötést, hogy minden M az adott nyomaték **abszolút értékét** tartalmazza, azaz mindegyik pozitív. És a forgatás irányát a képletben jelölted.

Te tudod, hogy az órán ti hogyan csináljátok, és igazodj ahhoz. Csak ne keverd a kettőt.

Mellékesen nézd meg, hogy ha a forgáspont máshová kerül (*B*), akkor a forgatónyomatékok teljesen meg tudnak változni. Szintén csak egy durva becsléssel: +16+80−100+35−20=+11, "balra" forgat.

Mérleghinta



Az egyensúly fenntartásához a két gyerek súlya által létrehozott forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást, az összegük nulla. A két forgatónyomaték nagysága egyenlő, az előjelük ellentétes.

$$M_1 = -M_2 \qquad F_1 \cdot k_1 = -F_2 \cdot k_2$$

A képlethez magyarázatul: ha a forgatónyomatékok összege nulla, akkor $M_1+M_2=0 \leftrightarrow M_1=-M_2$.

A forgásponthoz mindig a nagyobb erő van közelebb. Ha az erőkarok vagy az erők valamelyikén változtatunk, akkor a forgatónyomatékok egyensúlya és a mérleghinta felbillen.

Mozdulatlanság

A mechanika erőtani részét statikának is nevezik, mert a tárgyalt helyzetek statikusak, egy helyben álló, kiegyensúlyozott állapotú testekről szólnak.

Egy test mozgása kétféle dologból tud összerakódni. Az egyik tényező a test **helyzete**, ennek megváltozása egy forgáspont körüli elfordulást jelent, a test **forgó mozgást** végez. Ha a testnek nincs rögzített forgáspontja, attól még elfordulhat, egyéb hatás hiányában a tömegközéppont körül. A másik tényező a test **helye**, ezen leginkább a test tömegközéppontjának a helyét érthetjük. Ha a test helye megváltozik, akkor a test **haladó mozgást** végez. Mindkét mozgás jellegzetességeivel önálló témakör foglalkozik.

Egy testet mozdulatlan tekintünk, ha az sem forgó, sem haladó mozgást nem végez.

Lehetséges, hogy rettenetes erők feszülnek egymásnak, de amíg ezek az erők kiegyenlítik egymást, addig a test mozdulatlan.

Egy test akkor és csak akkor van forgási egyensúlyban, ha a testre ható erők forgatónyomatékainak *bármelyik* pontra vonatkozatott előjeles összege nulla.

Egy test csak akkor áll, ha a testre ható erővektorok eredője nulla.

Beszéljük meg ezt az „akkor és csak akkor”-t. Vegyünk egy állítást: „A rakéta akkor és csak akkor indul (B), ha az űrhajósok beszálltak (A).” B↔A. Két *független* dolgot állítunk egyszerre. **1)** A rakéta **akkor** elindul, ha az űrhajósok beszálltak. A beszállástól a rakéta biztosan elindul. B←A. És ha nem szállnak be? *Lehet*, hogy akkor is elindul, talán automata űrhajó, ez nem derül ki a mondatból. Beszállnak: biztosan elindul; nem szállnak be: nem tudjuk. **2)** A rakéta **csak akkor** indul, ha beszállnak. Űrhajós nélkül a rakéta nem indul. Ha elindult, akkor biztosan beszálltak. B→A. De ha beszállnak, *még nem biztos*, hogy elindul. Beszállhatnak gyakorlásul is. Elindult: biztosan beszálltak; nem indult el: nem tudjuk. **1+2) Vonjuk egybe a két részállítást.** Mit jelent az, amikor az 1) és a 2) is érvényes? Beszállnak: biztosan indul, elindult: biztosan beszálltak. Nem szállnak be: biztosan nem indul, nem indult el: biztosan nem szálltak be. *Akkor és csak akkor.* A mondat két fele, a feltétel és a következmény tehát pontosan egyszerre igaz. **Ha az egyik teljesül, akkor a másik is. Ha az egyik nem teljesül, akkor a másik sem.** B↔A. A matekon belül talán tanulni fogtok formális logikát, abban fogtok ilyenekkel szórakozni. Kicsit nehéz, mert a nyelv szavai nem az ilyen precíz és szigorú jelentések kifejezésére készültek. Amint sikerül szimbólumokba áttenni a szöveget, minden könnyebbé válik.

Ha ezek után megfigyeled a második szabályt, az azt sejteti, hogy ha a testre ható erők eredője nulla, akkor a test más is csinálhat, mint áll. Erről szól majd A TEHETETLENSÉG TÖRVÉNYE fejezet. De ahhoz, hogy a test álljon, az erők eredőjének nullának kell lennie. Most ennyi is elég.

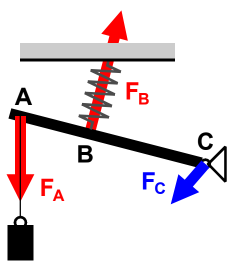
Sokszor lesz segítségedre ez a törvény. Ha látod, hogy egy test nem forog, akkor tudod, hogy a rá ható forgatónyomatékok összege nulla, akárhol nézed is meg. Ha forog, akkor pedig tudod, hogy a forgatónyomatékok összege nem nulla. Ha szerinted forognia kellene, de nem forog, akkor valahol van még olyan erő, amit elfelejtettél bevenni a számításba, vagy olyan erőnek a forgatónyomatékát vetted figyelembe, amely nem is erre a testre hat. Ha szerinted nem szabadna forognia, mégis forog – vagy azt állítja róla a feladat, hogy forog –, akkor ugyanez a helyzet.

Nézd meg a korábbi ábrát a kérdőjel alakú testtel, és olvasd el a feladatot újra! Mennyi a testre ható erők forgatónyomatékának összege? **…**

Ha azt mondod, hogy nulla, akkor én azt mondom, hogy *mondta valaki, hogy a test nem forog?* Ki tudja, esetleg éppen azt látjuk, ahogy a forgáspont körül megindul felfelé, pozitív irányba. A feladat nem állította, hogy az erők egyensúlyban vannak, csak egyszerűsítettük az ábrát. Ez a legalapvetőbb hiba, erre vigyázz nagyon: csak olyan adatra alapozz, amit biztosan tudhatsz. Ezt vésd az eszedbe. Ha szükséges, kérdezz rá. Ha nem lehet, akkor *írd le*, hogy milyen feltételezésre alapozol.

De ha azt mondtad, hogy ennyi adatból nem lehet tudni, akkor gratulálok.

Nézd meg ezen a már egyszerűsített ábrán levő felállást! Ez a rendszer egyensúlyban van. (Most már tudod, nem csak hiszed.) Mi történik, ha a C csuklóból kihúznád a csapszeget, a pöcköt? **…**



A józan érzékeidre hagyatkozva remélhetőleg érzed, hogy ekkor a rúd C vége felcsapódna. Akkor pedig ebben a helyzetben a rudat egy erő, a kék $\mathbf{F_C}$ erő tartja a helyén. Ez az erő kényszererő, és a nagysága és iránya attól függ, hogy az egyensúly létrehozásához milyen erőre van szükség.

A törvény azt mondja ki, hogy a test *bármely* pontjára is kiszámítva az erők forgatónyomatékának előjeles összegét, akkor ha az nulla, a test nem forog. És ha nem forog, akkor tudjuk, hogy nulla. Ennek a rendszernek van rögzített forgáspontja, forgás tehát csak ekörül lehetséges. A gyakorlatban elég a törvényt a forgásponton kívül az erők támadáspontjaira elvégzett számításokkal ellenőrizni, más pontra nem kell.

A képen levő, egyensúlyban levő rendszer esetében tehát három pontra kell ellenőriznünk a forgatónyomatékokat: az A pontra vonatkoztatva az F_B és F_C forgatónyomatékait, a B pontra vonatkoztatva az F_A és F_C forgatónyomatékait, a C pontra vonatkoztatva az F_A és F_B forgatónyomatékait. Az összegnek mindhárom esetben 0-ra kell kijönnie. Soha ne felejtsd el, hogy a kiszámításhoz **a forgáspontból az erő *hatásvonalára* merőlegesen** húzott erőkarok hosszát kell felhasználnod. Az $\mathbf{F_A}$ nem merőleges a rúdra, ezért az erőkarja soha nem a rúdban lesz, hanem a rajzon vízszintesen.

Az F_C erő irányát és nagyságát nem ismerjük. Talán megtippelni sem tudjuk. Nem számít, mert konkrét számításokat fogunk végezni, amelyekből ezek az adatok majd kiderülnek. Ha végül az jön ki, hogy ennek az erőnek a nagysága 0, *az is egy eredmény*, amelyből megtudtuk, hogy ott mégsincs erő, és az egyensúly anélkül is fennmarad. Az is lehet, hogy a számításokból tudjuk meg, hogy az F_C is merőleges a rúdra. Most még nem tudjuk. A számításoknak pont az a feladata, hogy ha elméletileg jól végezzük el őket, akkor a kapott eredmények megbízhatóan elmondják nekünk a valóságot.

Mikor lenne az $\mathbf{F_A}$ erő erőkarja a rúd vonalában?

A mozdulatlanság törvénye két részből áll. A második fele úgy használható, hogy **ha azt látjuk, hogy egy test mozdulatlan, akkor teljesen biztos, hogy a rá ható erők eredője nulla**, különben a test haladna. Ha egy feladatban a test mozdulatlan, de az erők megvizsgálásakor azt látjuk, hogy azok a testben nem nullát adnak eredőül, akkor valamit elhibáztunk, valószínűleg kifelejtettünk a számításainkból valamilyen még fellépő erőt, például az alátámasztás erőhatását. Figyelnünk kell arra, hogy ehhez a test *által* más testre gyakorolt erőt ne vegyük ide, csak azokat, amelyek a kérdéses test*re* hatnak. Nézd meg a rajzot: mindhárom **F** erő a rúdra hat. Van még egy törvény, ami most teljesül:

Három nem párhuzamos erő eredője csak akkor lehet nulla, ha a három erő hatásvonala egy pontban metszi egymást.

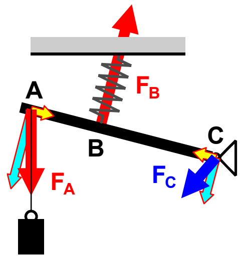
Ezt a rudat meghúzhatjuk, felnyomhatjuk, de a rugó és a súly végül megtalálja az egyensúlyát, a rendszer mozdulatlanná válik. Tehát tudjuk, hogy most mindhárom előbb felsorolt forgatónyomatékösszeg egyformán 0. Ha nem az lenne, a rendszer elfordulna. Az ebben a jó nekünk, hogy ha valamelyik erőt nem ismerjük, de ki kell számolnunk, akkor kiindulhatunk abból, hogy a forgatónyomatékok összege 0, tehát az ismeretlen erőnek úgy kell kijönnie, hogy ezt a követelményt teljesítse.

Azt én nem állítom, hogy ez nagyon egyszerű, de ha ilyenkor felírod azokat az egyenleteket, amiket tudsz, behelyettesíted azokat az értékeket, amiket tudsz, akkor a feladat megoldása sokszor egy egyenletrendszer megoldására zsugorodik, és azzal már illik elbánni.

A forgatónyomatékokat ehhez melyik pont*okra* számítjuk ki?

Ha érdekel, akkor megmutatom ezeknek az elveknek a használatát konkrét számításban is.

Ismerjük az $\mathbf{F_B}$ erőt, amely merőleges a rúdra, és azt is, hogy a rúd mekkora α szöget zár be a vízszintessel. A feladat az $\mathbf{F_A}$ (a test súlya) és mellékesen az $\mathbf{F_C}$ kiszámítása. $\mathbf{F_B}$=90 N, a súly felfüggesztési pontjának távolsága a csuklótól (AC) 160 cm, a rugó csatlakozási pontjának távolsága a csuklótól (BC) 90 cm, eszerint AB=70 cm. α=22°.



A számítások megkönnyítésére mindkét keresett erőt két komponensből fogjuk összerakni, bejelöltem őket, a rúdra merőleges komponensek legyenek $\mathbf{F_{AX}}$ és $\mathbf{F_{CX}}$, *ezeknek a erőkarjait ugyanis már ismerjük*, a rúd irányú (sárga) komponensek pedig $\mathbf{F_{AY}}$ és $\mathbf{F_{CY}}$, ezek forgatónyomatéka automatikusan 0, mert a hatásvonaluk átmegy a tengelyen. A számítások során kiderülhet akár az is, hogy valamelyik komponens nagysága is nulla, de előre ezen nem kell töprengenünk.

Írjuk fel a forgatónyomatékok egyenleteit mindhárom pontra (A, B és C), az egyensúly teljesülésekor:

A: $+F_B \cdot \overline{AB} - F_{CX} \cdot \overline{AC} = 0$ **B:** $+F_{AX} \cdot \overline{AB} - F_{CX} \cdot \overline{BC} = 0$ **C:** $+F_{AX} \cdot \overline{AC} - F_B \cdot \overline{BC} = 0$

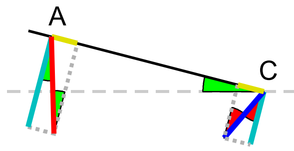
Látod az előjeleket? Ezen nagyon el lehet csúszni. A három egyenlet három különböző pontra írja fel a forgatónyomatékok egyensúlyát, és mindháromszor *újra* meg kell nézni, hogy az adott forgáspont (A, B és C) körül melyik erő merre forgat. Balra van a pozitív, emlékszel? *Ugyanaz* az erő (itt F_B) lehet pozitív az egyikben, negatív a másikban. A kezdő "+" előjeleket hangsúlyozásul írtam ki.

Helyettesítsük be az ismert számokat:

+90 N·0,7 m–$\mathbf{F_{CX}}$·1,6 m=0 +$\mathbf{F_{AX}}$·0,7 m–$\mathbf{F_{CX}}$·0,9 m=0 +$\mathbf{F_{AX}}$·1,6 m–90 N·0,9 m=0

Az *eredményül* kapott **F** értékeket mindig pozitívként helyettesítsd be (itt most mind úgy is jött ki), hadd érvényesüljenek az egyenletben levő előjelek! Ez két ismeretlen és három egyenlet, több is, mint amennyi kell. Oldd meg az elsőt, az eredményt helyettesítsd be a másodikba, a harmadikkal pedig ellenőrizheted az eredményt: $\mathbf{F_{CX}}$=39,375 N, $\mathbf{F_{AX}}$=50,625 N. Eddig végül is elég sima ügy, nem? Most csináld meg te is, üres papírra, elölről. Ne less, nem engem csapsz be, hanem magadat, mert azt hiszed, hogy már megy.

A fentiek az erők rúdra merőleges komponenseit adták meg. Az erőket, mint eredőket, a szögek alapján kell kiszámolni. A tankönyv végén levő AZONOS SZÖGEK fejezetben vannak ehhez segítségként használható tudnivalók. Csináltam egy másik rajzot is, ugyanaz, mint a feladat, rajza, csak vonalakká egyszerűsítve. Az α szöget a rúd és a vízszintes közötti szögként ismerjük (zöld), de megjelöltem, hogy még hol van ugyanaz a szög. És a piros? Ugye azt hinnéd, hogy az ugyanennyi? Hoppá! *Semmi* nem támasztja ezt alá. Ha te látsz valamit, ami bizonyítja, akkor nyugodtan használd azt, írd le, de egyébként nem szabad valamit tényként használnod, amíg az nem válik bizonyítható ténnyé. Külön *figyelj fel* az ilyenre, bár nehéz, de így esetleg időben észreveheted a tévedésedet egy hasonló helyzetben. Ehhez sajnos jó matekosnak kell lenni, de *ez sosem jelenti azt*, hogy egy gyengébb matekos nem jöhet rá ugyanarra.



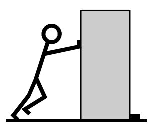
Kiszámoltuk a rúdra merőleges két cián színű vonalat A és C pontoknál, ezek $\mathbf{F_{AX}}$ és $\mathbf{F_{CX}}$. Az α-t ismerjük, 22°, $\mathbf{F_{A}}$=$\mathbf{F_{AX}}$ / cos α, =54,6 N. A rúd irányú összetevő $\mathbf{F_{AY}}$=$\mathbf{F_{AX}}$ · tg α, =20,45 N. A Pitagorasz-tétellel ellenőrizhetjük. Lehet, hogy most felhördülsz, hogy ezt meg honnan a szutyokból kellene tudnod. De ezért rágom a füledet állandóan, hogy a szögfüggvényeket és a Pitagorasz-tételt úgy kell tudnod, hogy egy ilyen téglalap bármelyik vonalát bármiből bármikor ki tudd számolni. Ha ez nem megy, akkor most megálltál, és lehetetlenség a befejezésig eljutnod, kb. a pontok harmada ugrott. Jó esetben.

Ha visszanézed eddig ezt a feladatmegoldást, remélhetőleg te is azt látod, hogy egyszerűen csak mentünk előre, mindig az egyetlen nyilvánvaló úton. Miután a feladatról elkészítetted magadnak a rajzot – *nem miniatűr méretben, hanem még a szögek és befogók is jól láthatóak legyenek* –, láttad, hogy egy elforduló rúdról van szó, rá ható erőkkel, akkor kiszámolod a forgatónyomatékokat, kiindulva az egyensúlyukból, aztán az erők összetevőihez szokásos derékszögű háromszögek születtek, amiből mindent megtudsz. Eddig csak ennyit csináltunk.

Most jöhet egy csöppnyi furfang. A pirossal jelölt γ szögeket nem ismerjük, csak a rúdra merőleges $\mathbf{F_{CX}}$ oldalt. Mi legyen, mi legyen? Az egyik megoldás alapulhat arra, hogy a három erő hatásvonalának egy pontban kell találkozni, berajzolod, és ebből az $\mathbf{F_{C}}$ szöge már meg is van. Másik: a rúd nemcsak nem forog, hanem el sem megy sehová. Áll. A törvény erre azt mondja, hogy akkor a testre ható erők eredője nulla. A rúdra merőleges cián színű vektorokra, megsúgom, a forgatónyomatékok egyenlősége miatt ez igaz lesz, a PÁRHUZAMOS ERŐK EREDŐJE fejezetből. A rúd irányában pedig összesen a két sárga erővektor van. A szabály szerint ezek eredője is nulla, mert csak ezek tudnák a rudat a vonala mentén elmozdítani, de az mozdulatlan. Két erő eredője nulla? Akkor ezek egyenlő hosszúak! Mennyi is volt az A pontnál levő $\mathbf{F_{AY}}$? 20,45 N. Akkor az $\mathbf{F_{CY}}$ is ennyi. $\mathbf{F_{CX}}$=39,375 N volt, és már ismerjük is a C-nél levő háromszög(ek) befogóit, akkor az átfogó most már gyerekjáték: a kék $\mathbf{F_{C}}$, a csuklóban ható erő 44,37 N. Bónuszként kiszámoljuk a γ szöget: például tg γ=20,45/39,375, =27,45°, a rúddal bezárt szög 90–γ=62,55°.

Sajnos ez a megoldás már régen matek és nem fizika. Hát, ezért kell matekot is tanulni, mert az az *eszköz*, a fizika csak az elméletet adja. De őszintén: tényleg annyira veszélyes volt? Csináld meg még egyszer, írd le szépen egy üres papírra, számold ki újra, és hidd el, eszedbe fog jutni, amikor kell.

Fontos, hogy egy ismert helyzetről megfelelő erőtani **vázlatot tudjunk készíteni**, egyszerűsítve az adatokat, mert a számításokat annak alapján célszerű elvégeznünk. Ha viszont a vázlat hibás, hibás lesz a számítás is. Nézzünk meg még egy példát erre az egyszerűsítésre.

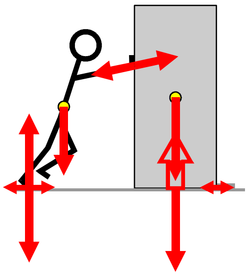


Képzeljük el, hogy nekifeszülünk egy nagy ládának, és fel akarjuk dönteni. A láda alja egy támaszték miatt nem fog elcsúszni. *Készíts vázlatot, ábrázold az összes itt létrejött erőt!* ***Ne** nézd a lejjebb következő ábrát!* **…**

Megcsináltad? A rajzon én egyelőre minden erőt azonos színnel jelölök, hogy maradjon még egy kis homály. Láthatod, hogy általában erő–ellenerő párok jönnek létre, ott, ahol testek érintkeznek. És ahol nem? Látsz ilyen erőt? Hát persze, a mi nehézségi erőnk és a szekrény nehézségi ereje is pár nélkül marad, látszólag. Megvan a párjuk, mindkét erő a Föld tömegvonzásából származik, és mivel mi is tömegvonzzuk a Földet, arra is hat egy ellenerő, csak azt nem szoktuk ábrázolni. Egyébként a Föld tömegközéppontjában lenne az elméleti támadáspontja, az ilyen egyszerű helyzetekben.

A nehézségi erők átadódnak a talajnak, amelyekhez tartozik ellenerő, a szekrényt nyomó kezünknél is erők jönnek létre. Ismerjük, hogy ha kavicsos talajon lennénk, akkor a lábunk hátracsúszna, ezért a lábunknál is kell lennie egy vízszintes erő–ellenerő párnak, mert a hátracsúszást csak erő akadályozhatja. A szekrény aljánál van egy kis zsúfoltság, a harmadik erőt másfajta nyíllal tettem láthatóvá.

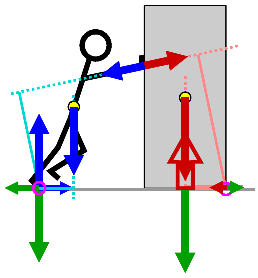
Akár billen a szekrény, akár nem, bármelyik adott pillanatban az egész rendszer **egyensúlyban van**.



Van itt egy kis probléma: mintha a súlyunkat és a szekrény súlyát is két példányban rajzoltam volna be. Az egyik a lábunknál van, a másik a hasunkban. (Egy átlagos testalkatú embernek ott van a tömegközéppontja, főleg ebéd után.) *A te feladatod* tisztázni ezt a kérdést.

Készíts új ábrát, amelyen azonos színnel jelölöd meg az azonos testre ható erőket! Tudod, hogy mennyire fontos, hogy egy-egy test egyensúlyi helyzetét vizsgálva pontosan azokat az erőket vedd figyelembe, amelyek arra a testre hatnak. A rajz célozza elsősorban a forgási egyensúly feltételének, a *forgatónyomatékok* nulla összegének ellenőrzését! **…**

Én is elvégeztem a feladatot. Az új ábrán megkapjuk a választ az előbbi kérdésre a kétszer berajzolt nyilakról. A nehézségi erőt a Föld hozza létre, és *ránk* hat. Ennek az erőnek a hatására mi nyomjuk a talajt, és az az erő a *talajra* hat. Két különböző test, két erőcsoport.



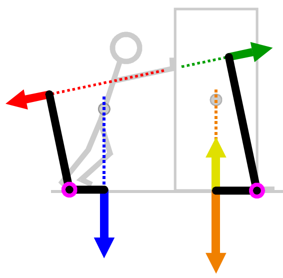
A talajra ható erőket most hagyjuk is, nem érdekesek. Ránk négy erő hat. A nehézségi erő, a talaj alátámasztó ereje, a szekrény nyomóereje és a lábunknál a talaj által az elcsúszás érdekében létrehozott súrlódási erő, erről később bővebben lesz szó. Az utóbbi akkor látszik rendesen, ha a nézetet kinagyítod (az eszköztáron vagy a menükben). A négy erőnek <u>csak egyike aktív erő</u>, csak a nehézségi erőnk értéke biztos, az jön létre a többitől függetlenül. A többi három csak <u>ellenerő</u>, amelyeknek az eloszlása, nagysága (és iránya) szükség szerinti értékre áll be, *igazodva ahhoz a követelményhez, hogy egyensúlyt kell tartaniuk*.

Az eseti (azaz rögzítetlen) forgáspont a hátul levő lábunknál alakul ki; az első lábunkat kicsit megemeljük, vagy a másik mellé tesszük. A lábunknál ható két erő a forgatónyomaték szempontjából érdektelen, a másik két erő hatásvonalait és erőkarjait berajzoltam. Nemcsak forgási egyensúlyban vagyunk, hanem állunk is, ezért a ránk ható erők eredőjének is nullának kell lennie; most csak tegyük fel, hogy úgy is van, a feladat szerint erre nem kell figyelni.

A ládára is négy erő hat: az általunk rá gyakorolt nyomóerő, a nehézségi erő és a talaj alátámasztási ellenereje. Az utóbbi kettő nem egyforma! Ha nem lenne jelen más erő, akkor egyformának kellene lenniük, de itt belépett egy harmadik erő is, a miénk, amely a sarokpont körül forgat, és csökkenti, jó esetben végül szükségtelenné is teszi az alátámasztási erőt.

Ha figyeltél, észrevetted, hogy csak három erőt mondtam el, a negyedik a láda mögött levő kis támasztéktól származó erő, amely nélkül a szekrény alja elcsúszhatna. A támasztékot egyébként a talaj részének vettem, azzal fölösleges volna vacakolni.

Három erő nem megy át a megjelölt eseti forgásponton, abból kettőnek azonos (vagy inkább egybeesik) az erőkarja, a tőlünk származó erőé pedig külön látható.



Ez két önálló, de egymásra ható forgási rendszer, két forgásponttal. Még mindig nem elég tiszta a kép, készítettem egy lecsupaszított vázlatot is, amelyen már csak a forgató erők, hatásvonalak, forgáspontok és erőkarok szerepelnek, másra nincs is szükség. Kihagyom azokat az erőket, amelyek forgásponton mennek át, mert azok nyomatéka nulla, és merev, meghajlított rudakkal helyettesítem az erőkarokat, világossá téve, hogy mi mivel van kapcsolatban. Minden szabályok legfontosabbja: minden erőt eltolunk az erőkarjához, abban a rendszerben, ahol hatnak.

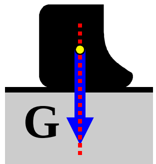
Jól figyeld meg a vázlatosítást. Azonosítsd a forgáspontot és az erőkarokat. Most már láthatod, hogy milyen erők dolgoznak egymás ellen, mekkora forgatónyomatékokkal. Látszik, hogy ha távolabb visszük a nehézségi erők függőlegesét a lábunktól, akkor nagyobb erővel tudjuk a szekrényt nyomni. Az is látható, hogy ha a szekrény szélesebb lenne (de változatlan súlyú), nagyobb lenne a nehézségi erejének az erőkarja, és nehezebb lenne felborítani. És az is látható, hogy ha a szekrényt magasan nyomjuk, nagyobb erőkart tudunk találni az erőnknek, kevesebb erő is elég a billentéshez. Ezeket mind tudtad már, de most már a fizikai magyarázatát is ismered.

Tisztázzuk: az ilyen erőtani feladatokban mindig ***egyensúlyban levő*** *rendszert vizsgálunk. A cél a szekrény megmozdítása, de <u>nem a mozgását akarjuk leírni</u>, az a következő két témakörben következik. Ha a szekrény már billen, akkor is mindig az adott pillanatban működő erőket nézzük, és a szekrény abban a pillanatban is egyensúlyban van. Vegyük úgy, hogy olyan lassan mozdítjuk el, hogy a mozgása jelentéktelen.* ***Az erők kiszámítása után azt fogjuk tudni, hogy a további mozdításhoz mekkora erőnél kell egy*** **egészen kicsivel** ***többet vagy kevesebbet kifejteni.*** *Mi a pontosan mozdulatlan határ-*

*helyzetet számítjuk ki. Ha az egyensúlyt fenntartó erők valamelyikét megváltoztatjuk, akkor azzal egy másik egyensúlyi helyzetet hozunk létre. Kivéve, ha a szekrény felborul, de akkor sem nézzük meg a borulás folyamatát, a sebességét, vagy hogy mekkora erővel vágódik a földnek, csak utána **megállapítjuk az új állapot létrejöttét,** egy átmeneti mozgás végén. És ha kell, felvázoljuk az ebben a helyzetben működő, az új egyensúlyt fenntartó erőket.*

Arra koncentrálj, hogy amikor a rendszer mozdulatlan, akkor ott az ehhez szükséges két kötelező feltételt teljesítő erők vannak jelen. Ha az általad felismert erők nem teljesítik a feltételt, akkor valami még hiányzik, mert az egyensúly megvan.

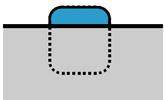
Súlypont



A feladatokban és az egyszerűsített modellekben úgy vesszük, hogy a test súlya a **tömegközéppont**jában hat. A homogén anyagú, szabályos testekben ez a pont a test mértani középpontjával esik egybe, másféle testeknél számítással vagy méréssel adható meg, de erről már volt szó. (A képen sem "középen van.)

Tömegközéppontról elsősorban a testek mozgásának vizsgálatakor beszélünk. Ugyanezt a pontot inkább **súlypont**nak nevezzük akkor, ha a testek egyensúlyát nézzük, és *ha a testnek van súlya* (lásd SÚLY). A mértanban a súlyvonal jelentése ennél bővebb, de itt a **súlyvonal** a súlypontból induló függőleges egyenes, a súlyerő hatásvonala (lásd még FÜGGŐLEGES). Ahogy több, merev rendszert alkotó testnek van közös tömegközéppontja, úgy van *közös súlypontja* és közös súlyvonala is.

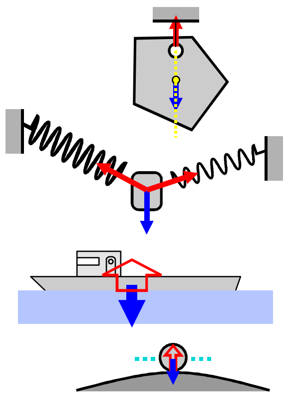
Egyensúly



Az egyensúly fogalmát több értelemben is használjuk, a vizsgált rendszer mindegyikben mozdulatlan. Egyensúly esetén a test(ek)re ható erők kiegyenlítik egymást, az eredőjük nulla. Ez elmondható akkor is, ha egy ládát betonba süllyesztünk, mert az erőegyensúly valóban fennáll. A test mozdulatlan, de *mozdíthatatlan* is. Hasonlóan merev rendszert hozunk létre azzal, ha egy állványzat elemeit egymáshoz rögzítjük, mert az elemek meghajlítása, rongálása nélkül a szerkezet nem fog elmozdulni. Az egyensúly szó ebben az esetben csak annyit jelent, hogy a mozdulatlanság erőtani feltételei teljesülnek. Nem ez a valódi egyensúly.

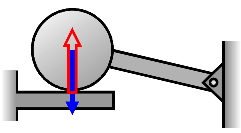
Egyensúlynak az *elmozdítható* testek mozdulatlan helyzetét hívjuk. A mozdulatlanság törvénye kimondta, hogy ekkor a testre ható erők forgatónyomatékainak a forgáspontra vonatkozatott előjeles összege nulla. A forgáspont lehet rögzített vagy eseti. Ha a test mozgása teljesen szabad, akkor a test a tömegközéppontja körül fog elfordulni valamilyen síkban, a kezdeti erők szerint.

Síkidom vagy egy rúd elfordulásának **forgáspont**ja van, három dimenziós test esetében ehelyett **forgástengely**ről beszélünk. Ha a forgás a képernyő síkjában történik, akkor a rajzon a tengelyt csak egy forgásponttal helyettesítjük, elképzelve, ahogy a tengely merőlegesen kiáll belőle. Elfogadható a két szó keverése, amíg az nem okoz zavart.



A **szabadegyensúly** az "igazi" mozgási egyensúly. Ekkor a test mozdulatlan, de már a legkisebb erővel is el lehet mozdítani valamennyire. Egy hatalmas harangot is el tudsz mozdítani kisujjal az egyensúlyi helyzetéből. Nagyon kis erőnél nagyon kis elmozdulás várható, de a nagyon kis elmozdulás is valami.

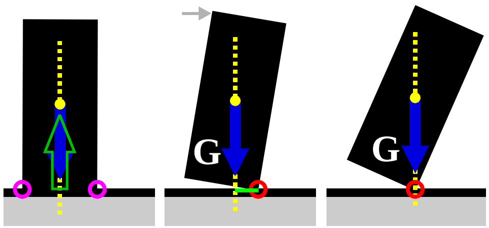
A jobbra látható rendszerek mindegyike szabadegyensúlyban van. Az ötszögű test ingaszerűen viselkedne, ha oldalról egy kicsit megtolnánk. A rugókon felfüggesztett test bármilyen irányban elmozdítható, de a rugók visszaállítanák a jelenlegi helyzetet. A vízen úszó hajót bármilyen kis erővel megemelhetnénk vagy lenyomhatnánk valamennyire. A golyó vízszintes irányban szabadegyensúlyban van. Hogy ez a golyó a legkisebb megmozdításra is elgurul, az már külön téma. *Most még* egyensúlyban van.

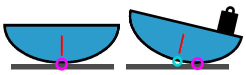


Kényszeregyensúly érvényesül a bal oldali ábrán látható rendszerben. A rendszer törekedne egy szabadegyensúlyi helyzet felé, de azt a polc kényszerereje *akadályozza*. A gömb és a rúd elmozdítható, de csak egy adott értéknél nagyobb erővel. Ha a gömböt mi ennél a tartóerőnél kisebb erővel próbáljuk emelni, akkor az nem mozdul. A rendszer bizonyos határon belül mozdulatlan marad, egymásnak feszülő, de egymást kiegyenlítő erők hatása alatt.

Mi a szabadegyensúly és a kényszeregyensúly közötti különbség? Mik a létrejöttük feltételei?

Merev testek nem teljesen szabad mozgása során a test valamilyen pontja forgásponttá *válhat*, illetve egy azon átmenő egyenesből forgástengely lesz, átmenetileg. Ha egy ládát megbillentünk, akkor az egyik éle **eseti forgástengely** feladatát tölti be, vagy ugyanezt csak síkbeli rajzon nézve **eseti forgáspont** lett belőle. Ha a másik irányba billentjük, akkor a másik sarka lesz eseti forgáspont. Ha leteszel egy poharat az asztalra, akkor az aljának bármelyik pontjából lehet eseti forgáspont. Csak attól függ, hogy a forgáskor (megbillentéskor) merre mozdul a pohár. A bal oldali ládának két lehetséges eseti forgáspontja meg van jelölve.





Olyan eset is van, amikor a forgáspont a kitérítéskor vándorol, a bal oldali ábrán egy ilyen esetet láthatsz.

Forgási szabadegyensúlyban van a test, ha kis erőtől is el tud fordulni, de most mozdulatlan. Ennek a feltétele a testre ható erők forgatónyomatékainak kiegyenlítettsége az aktuális forgáspontra.

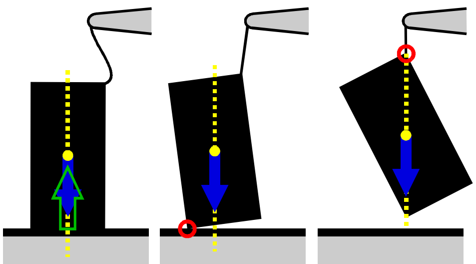
Például kényszeregyensúlyi helyzet az, amikor a fenti láda a talpán áll. Ekkor a súlyerő erőkarja egyik lehetséges forgásponthoz képest sem nulla, de a láda azért nem fordul el, mert a talaj nyomóerőt fejt ki a test aljára, és ezzel a súly forgatónyomatékát bármelyik forgásirányba kiegyenlíti.

A középső láda nincs egyensúlyban, mert a súlypontjában ható G súlyerőnek a kialakult eseti forgáspontra vonatkozó erőkarja nem nulla, így a forgatónyomatékok összege sem nulla. A láda, ha elengedjük, a pozitív irányú forgatónyomaték hatására elfordul, visszabillen a talpára.

Megjegyzés: Tapasztalatból tudjuk, hogy ilyenkor a láda kicsit *átlendül* ezen a helyzeten, és egy ideig billeg, de ez már a mozgások témakörébe tartozik. Itt úgy képzeljük el a dolgot, hogy a test szépen, nyugodtan fordul el, és meg is áll, amikor a forgatónyomatékok nullára állnak be.

Amikor a ládát annyira billentjük meg, hogy a súlypontja pontosan a forgáspont *fölé* kerül, a súlyerejének a hatásvonala átmegy a forgásponton, a forgatónyomaték nullára csökken, és a láda "a sarkán egyensúlyozva" megáll. Egyensúlyban van, és kis erővel is elmozdítható, ez szabadegyensúly.

Mi a súlypont? Mi az egyensúly feltétele?



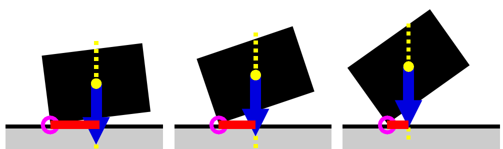
Nézd meg ezt a képet is. A láda először kényszeregyensúlyban a talpán áll. Kimozdítható belőle, de ehhez nem elég bármilyen kis erő. Amikor a daru a sarkát elég erővel húzza, a láda bal alsó sarka eseti forgásponttá válik, a láda elbillen. **Kényszeregyensúlyban** van most is, a kötél erejének forgatónyomatéka ellensúlyozza a súlyerő forgatónyomatékát, de elég nagy erővel ebből mi is tovább tudnánk billenteni.

Miért nem elég ehhez bármilyen kis erő? Hiszen megvan az egyensúly, egy pici erő is forgatónyomatékot hoz létre, amivel a pozitív irányba forgató erők kicsi, de mégiscsak létező fölénybe kerülnének, ami miatt a ládának balra kellene billennie, nem?

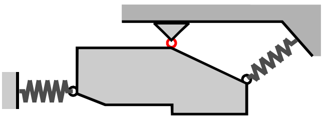
Köszönöm a kérdést. Azért nem, mert **a kötél ereje ellenerő, ami itt azt jelenti, hogy *a terheléshez igazodik***. Annyival húzza a láda sarkát, amennyi ahhoz kell, hogy a súlyerő forgatónyomatékát ellensúlyozza. Ha mi egy pozitív irányba forgató erőt fejtenénk ki a ládára, akkor *a kötélerő csökkenne*, mert kevesebbel kell hozzájárulnia az egyensúlyhoz. A mi erőnknek először át kellene vennie a láda megtartásához szükséges *összes* erőt a kötéltől, és csak a további erő eredményezne elfordulást.

Ha a daru a kötelet továbbhúzza, a láda felemelkedik, a *jobb felső* sarka válik eseti forgásponttá, és a láda **szabadegyensúlyi** helyzetbe kerül.

Mit kellene helyettesítenünk az erőnkkel a mozdulatlanság fenntartásához? Ez egyensúly?



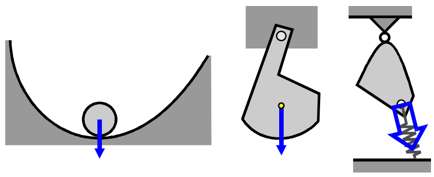
Ezen az ábrán azt figyelheted meg, hogy a felállított láda súlyerejének az eseti forgásponthoz húzott erőkarja egyre kisebb lesz. Ha az erő hatásvonalának iránya ugyanaz (itt függőleges), akkor a forgáskor az erőkar hossza változik. Elérheti a nulla hosszúságú állapotot is, ekkor a forgatónyomaték is nulla lesz, létrejön egy forgási szabadegyensúly. Mivel csökken a súlyerő forgatónyomatéka, ezért a láda billentéséhez szükséges erő is egyre kisebb lesz, ezt már tapasztalhattad.



Annak ellenére, hogy az egyensúlyban részt vevő erőként a példákban a szokás szerint a testek súlyerejét szerepeltetjük, az egyensúlyt másféle erők is létrehozhatják, irányíthatják. A balra látható tökmindegy, hogy milyen alakú testet a rugók teljes súlytalanságban is stabil forgási szabad-egyensúlyban tartják.

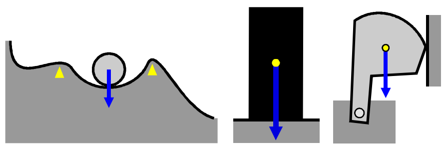
Egyensúlytípusok

Az ábrákon már észrevehetted, hogy az egyensúlyi helyzetekben a rendszer *várható viselkedése* eltérő.



Stabil egyensúlyi helyzetnek azt nevezzük, amikor az abból való bármilyen kimozdítás után a test <u>visszatér</u> az egyensúlyi helyzetébe. Az itt láthatókon kívül stabil volt az egyensúlya az EGYENSÚLY fejezet ábráján a hajónak, a rugókon függő testnek és a lógó ötszögnek is. Elforduló test stabil egyensúlyában a kitérítés során az erők vagy az erőkarok úgy változnak, hogy *az egyensúlyi helyzet felé* tereljék a rendszert. Egy inga súlypontja ilyenkor a forgáspont alatt van.

Metastabil helyzetnek az olyan stabil helyzetet nevezzük, amikor a test egy <u>kisebb kitérítésből még visszatér</u> az egyensúlyi helyzetbe. Tovább távolítva a kezdeti helyzettől a test elér egy instabil állapotot, azon túl pedig már a kezdeti helyzettől távolodni próbál, egy új (meta)stabil egyensúly felé törekedik. A távolodás mértéke, jellege nem számít, csak az, hogy a rendszer csak egy határon belül marad stabil. Metastabil az egyensúlya az alján álló ládának, mert ha kicsit kibillentjük, akkor visszabillen. De ha megdöntjük annyira, hogy a súlyvonala túljut az eseti forgáspontján, akkor ellenkező irányú forgatónyomaték keletkezik, ami a ládát felborítja.

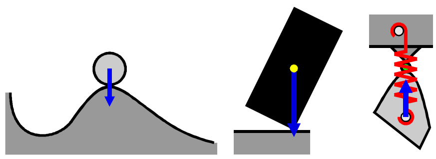


Felmerül a kérdés, hogy mikor mennyit tekintünk még "kisebb kitérítés"-nek. Elméletileg egy végére állított szívószál is metastabil, mert egy egészen kis kitérítésből még visszatér. Hogy ezt mi a gyakorlatban már kicsit stabil helyzetnek sem tartjuk, az külön kérdés.

A metastabil helyzetet csak ritkán veszik külön, olyankor, amikor ennek külön jelentősége van. A stabil helyzetek nagy része csak metastabil, mert ritka az olyan szabadegyensúly, amely *minden határon túli* kitérítés esetén is visszaáll. *Ezért gyakran a metastabil helyzetet is stabilnak nevezzük,* ha az instabilitási pont eléréséhez igazán jelentős kitérítésre van szükség.

Kényszeregyensúly csak stabil vagy metastabil lehet, mert ezeknél kell egy minimumnál nagyobb erő a rendszer kitérítéséhez.

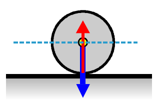
Instabil, más szóval **labilis** helyzet az, amikor a test *a legkisebb* kimozdítás után <u>magától tovább távolodik</u> a kezdeti helyzetétől. A kimozduló test végül megállapodik egy valamilyen más, nem instabil helyzetben. Egy instabil inga súlypontja ilyenkor a forgáspont fölött van.



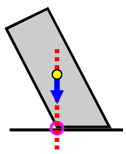
Tartósan fennálló instabil helyzetet előállítani a gyakorlatban nemigen tudunk. Az instabilitás pont azt jelenti, hogy a legkisebb hatásra is elkezdődik a kitérés. Egy ceruzát a hegyén, egy tojást a csúcsán megállítani csak akkor lehetne, ha a súlypontját tökéletes pontossággal igazíthatnánk a forgáspont fölé. A valóságban mindig marad egy kis eltérés, ami egy gyenge forgatónyomatékot hoz létre, és a test egyre gyorsabban távolodni kezd az egyensúlytól.

Ha ilyenkor az alátámasztást kicsit elmozdítjuk az elfordulás irányába, akkor a forgáspont áthelyeződése miatt a test a másik irányba kezd dőlni. Amikor ezt folyamatosan csináljuk, akkor *egyensúlyozunk*.

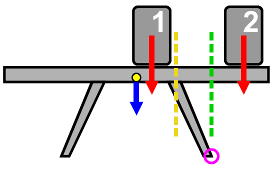
Semleges, más szóval **közömbös** vagy **indifferens** az egyensúlyi helyzete egy vízszintes asztalon levő golyónak, mert ha bármennyit is elmozdítjuk, akkor megmarad az új helyzetében. A semleges viselkedés csak vízszintes elmozdulásra figyelhető meg, minden egyéb elmozdulásra ez a golyó kényszeregyensúlyban van.



Félstabil a képen látható, asztalra állított test helyzete. Ez egy határeset, jól látszik, hogy a súlyvonal átmegy a test egyik lehetséges forgáspontján. Pozitív irányban (balra) instabil, mert ha a testet bármilyen kis mértékben kitérítjük, akkor egyre növekvő pozitív forgatónyomatéka hatására felborul. Az ellenkező irányban viszont a test kényszerstabil.

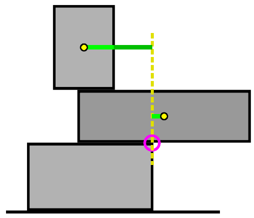


Mi az öt egyensúlyi helyzet neve? Mi a különbség a stabil és metastabil helyzet között?



A képen levő pad egy jól ismert példa az egyensúly és a forgatónyomatékok kapcsolatára. Látható a pad és a lábak együttes merev rendszerének súlypontja és súlyereje, és látható rajta két test. Először felemeljük a 2. számú testet. Aztán visszatesszük, és felemeljük az 1. számú testet. Mikor borul fel a pad? Nyilvánvaló, igaz? Csak az erők erőkarjait kell megjelölni, amelyek az eseti forgáspontunkból az erők *hatásvonalára* merőlegesen rajzolandók, mint mindig. Számolni most nem is kell, mert az 1. test súlya hozzátesz a pad súlyához, vagyis a 2. test felemelésének biztosan nem lesz következménye. Ha a 2. test elég nehéz hozzá, akkor legyőzi a pad súlyának forgatónyomatékát, és a pad már billen is.

Pótkérdés: ha a pad súlya nulla lenne (hogy ne zavarjon bele a képbe), akkor a zöld vagy a sárga vonal jelölné-e azt a határt, amelytől jobbra letéve a testet a pad felborul? Válasz: a zöld, mert a pont ide tett test súlyának hatásvonala menne át a lehetséges forgásponton. A zöld vonaltól kicsit balra a test súlya már balra forgat, stabilizál. A vonaltól kicsit jobbra tett test súlyának forgatónyomatéka már felborítja a padot. Az, hogy a pad lába honnan kezdődik, teljesen mindegy, ez egyetlen merev rendszer, *a láb végénél lesz a forgáspont*.

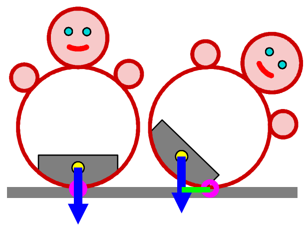


Három testet látunk egymáson. A testek mozdulatlanok. Elemezzük: A középső test súlypontja az alátámasztásán kívül van, negatív irányú forgatónyomatéka van az alsó test élére mint eseti forgáspontra vonatkoztatva. A felső test viszont a másik végére nehezedik, pozitív forgatónyomatékot hozva létre a középső testen. Érzésre látjuk, számolgatás nélkül, hogy ez az erő ellensúlyozza a középső test saját súlyát. *Nem azért, mert a súlya lenne nagyobb*, ami egyébként nem is igaz. Hanem azért mert a felső test a súlyával olyan távol nehezedik a középső testre, hogy nagyobb forgatónyomatékot hoz létre. Csak ez számít. Ha viszont a felső testet levesszük, a középső test felett győz a saját súlyának jobbra forgató nyomatéka, és lebillen.

Nézzük át röviden, amiről eddig szó volt:

- Egy test mozdulatlan, ha a rá ható erők és a forgatónyomatékok is kiegyenlítik egymást.
- Ha egy test el tudna mozdulni, de mozdulatlan, akkor azt mondjuk rá, hogy egyensúlyban van.
- Ha ekkor a testet bármilyen kis erővel el tudjuk mozdítani, akkor az egyensúlya szabadegyensúly, ha pedig csak egy adott erőnél nagyobb erővel, akkor kényszeregyensúly.
- Egyensúlyban lehet elforduló és egyéb módon elmozduló test is. Az elforduló testnek forgáspontja van, amely vagy rögzített, vagy eseti.
- Az egyensúlynak öt típusát különböztettük meg, akár forgó, akár más elmozdulási lehetőségnél: stabil metastabil, instabil, félstabil, semleges.

Próbáljuk ki a tudományunkat három **példafeladat**on.



► A keljfeljancsi egy réges-régi gyermekjáték, ezerféle változatban létezik. Az aljában levő rögzített nehezék miatt az egyébként üres, könnyű test közös tömegközéppontja nagyon alacsonyan van. Az elbillentésekor a baba alján levő eseti forgáspont vándorol. **Milyen típusú a baba egyensúlyi helyzete a jobb oldali képen? …**

Nincs is egyensúlyban. Ha ebben a helyzetben magára hagyjuk, azonnal elfordul, akkor pedig ez nem egyensúly, igaz? A tömegközéppontban függőlegesen ható súlyerőnek van egy nem nulla hosszúságú vízszintes erőkarja, vagyis van forgatónyomatéka, ez fordítja vissza. A *bal* oldali képen látható állapotban a baba egyensúlya stabil szabadegyensúly.

► Fúrunk a falba egy 10 mm átmérőjű lyukat, és 20 mm mélyen belecsúsztatunk egy ugyanilyen vastag, 6 cm hosszú pöcköt. A faltól 25 mm-re felakasztunk rá egy 3 kg tömegű képet, a rendszer egyensúlyban van. **Rajzold le és számítsd ki az erőket! … Ne lapozz! Előbb rajzold le.**

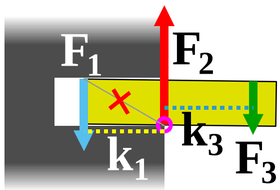
Az egyensúlynak két feltétele van, kezdjük a <u>forgatónyomatékokkal</u>, amelyek összege nulla. A pöcökre hat a zöld erő, amely a kép 30 N-os súlya. A pöcök nyilvánvalóan támaszkodik a falra, és az erő hatására negatív irányba kifordulni próbál a falból, ezt magad is érzed, igaz? Ha nem tartaná vissza más erő, akkor a lila körrel jelölt ponton támaszkodva fordulna kifelé, így tehát ezen a helyen van egy eseti forgáspont. Valamilyen erőnek meg kell akadályoznia az elfordulást.

Ha a pöcök szorosan illeszkedne, akkor az egész szárára hatna egy lefelé nyomó erő, de az illeszkedés nem szoros, leheletnyi elbillenésre van lehetőség, ezért a legbelső ponton hat a pöcök legvégére a kék F_1 ellenerő. A nyomott felület ellenereje mindig merőleges, ezért az erőt itt függőlegesnek vehetjük. Mekkora az erőkar? A pöcök kb. 10 mm magas, ezért egy 20·10 mm-es derékszögű háromszög átlójaként számolhatná ki az, aki nem tanult fizikát, de mi jól tudjuk, hogy az erőkar mindig merőleges az erőre. Ezért az átló nem érdekes, mert a k_1 erőkar itt vízszintes, pontosan 20 mm.

A piros F_2 támasztóerőnek nincs erőkarja, nincs forgatónyomatéka, vagyis az F_1 erő forgatónyomatékát a zöld F_3 erő által létrehozott forgatónyomaték ellensúlyozza. A k_3 erőkar 0,025 m, F_3=30 N, a forgásirány negatív, az F_3-hoz tartozó forgatónyomaték M_3=−0,75 Nm. Az egyensúly fennállása miatt az M_1 forgatónyomatéknak +0,75 Nm-nek *kell* lennie, k_1=0,02 m, ezek szerint F_1=37,5 N.

Mivel a feladat kitért arra is, hogy rajzold be "az erőket", ezért célszerű a megoldásba belefoglalni egy megjegyzést arról, hogy a rajzon csak a pöcök*re* ható erők láthatók, és a pöcök mindegyikre egy azonos nagyságú, ellenerővel válaszol, az F_1 és F_2 ellenerői a falra, az F_3 ellenereje a képre. Ha az ellenerőket is berajzoltad, az egyáltalán nem baj, de írd le egy sorban, hogy a pöcökre mely erők hatnak.

Az egyensúly másik feltétele szerint a pöcökre ható erők eredője is nulla. A három erőből kettőt már ismerünk, keressük az F_2 erőt. Ez egy alátámasztás, ami egy fentről lefelé ránehezedő erőt ellensúlyoz, vagyis a feltámasztó erő függőleges irányú.

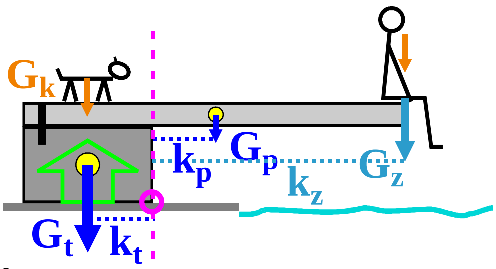


A három erő vektori eredője nulla, ezt tudjuk, mert csak így maradhat a pöcök mozdulatlan. Ha az egymással párhuzamos F_1 és F_3 erőket egy közös eredővel helyettesítjük, akkor annak pontosan ki kell egyenlítenie az F_2 erőt, mert az összegük nulla. Emiatt az F_1 és F_3 eredője elvileg átmegy a forgásponton. Most jön egy kis izgalom: vajon tényleg így van-e, mert ha nem, akkor bajban vagyunk. $F_1 \cdot k_1 = F_3 \cdot k_3$, itt ez az összefüggés érvényes a párhuzamos erők eredőjének helyére. Nem kell egyenletként megoldanunk, csak nézzük meg, hogy a forgáspont helye megfelel-e a kívánalomnak: $F_1 \cdot k_1$ =37,5·0,02=0,75 és $F_3 \cdot k_3$=30·0,025=0,75, tehát valóban, az F_1 és F_3 eredője a forgásponton megy át, azaz egyvonalban van az F_2-vel. (Talán be is tudnád bizonyítani, hogy mindig így is lesz.) A nagysága pedig 37,5+30=67,5 N, akkor ennyi az F_2 nagysága is, és teljesülnek a mozdulatlanság feltételei.

A feladat felhasználta az erőkről eddig tanultakat, és csak azokat. Légy szíves végignézni az egész levezetést, ebből már *mindent* értened kell. Ha nem első olvasásra, akkor másodikra. Ha bármelyik lépéssel bajod van, akkor most olvass utána, különben nem tudsz továbbhaladni. Dolgozz érte.

► A képen látható építmény végén ülsz. Az egészet csak a súlya tartja, és fel tud billenni. A betontömb egy 80×80 cm alapú, 30 cm magas hasáb, amelynek a sűrűsége 3000 kg/m3. A palló a tömbhöz van rögzítve, a vastagsága 10 cm, a tömege 40 kg, a teljes hossza 3,6 m. A te tömeged 50 kg. Vízbe esel-e, ha odahívod és a karodba veszed a 120 N súlyú kutyádat? …

Ha ez a rendszer felborul, akkor a tömb első élénél lesz az eseti forgáspontja, megjelöltem. Most még *talán* egyensúlyban van, meg kell vizsgálunk, hogy teljesülnek-e ennek a feltételei. Ha igen, milyen típusú az egyensúlya? …



Rendes esetben metastabil kényszeregyensúly, mert kisebb kibillentés után visszabillen, és bármilyen kis erő nem elég a kibillentéséhez. Ha jobbra forgató irányba pont most van kiegyensúlyozva, akkor félstabil. Ezek a dolgok a forgatónyomatékok kiszámítása után ki fognak derülni.

Mindenekelőtt számítsuk ki a betontömb $\mathbf{G_t}$ súlyát. A SÚLYERŐ fejezetben az áll, hogy a súly képlete $\mathbf{m \cdot g}$, ahol a $\mathbf{g}$ értékeként használhatunk 10-et, de valójában 9,80665 m/s^2. Hát mi most adjuk meg a módját, számoljunk a pontos értékkel.

A tömb térfogata 0,8·0,8·0,3=0,192 m^3, a sűrűsége 3000, a tömege a kettő szorzata: m_t=576 kg. A súlya egész pontosan $G_t = m_t \cdot g$=5649 N. A rajz nem méretarányos, de azért nagyjából a helyzetet mutatja. Az eredményt úgysem szerkesztéssel kell megtalálnod, hanem az adatokból kell kiszámolnod, vagyis a rajznak nem kell pontosnak lennie, csak segítsen az elképzelésben.

A megoldás nagyon egyszerű: csak kiszámítjuk az erők forgatónyomatékait. Balra forgató erő a G_t, és *átmenetileg* a kutya G_k=120 N súlya, ugyanakkora erőkarokkal. A kutyát hagyhatjuk, az úgyis odébbmegy, mert kíváncsi arra, hogy te mit nézel. Mekkora az erőkar? A G_t támadáspontja a tömb tömegközéppontja, de a tömb tömör beton, homogén, egyenletes sűrűségű, vagyis ez a pont a mértani középpontban van, félúton a két oldala között. Ha a tömb szélessége 80 cm, akkor a középpontja és a lila szaggatott vonal közötti távolság 40 cm. A tömb súlyának forgatónyomatéka $M_t = G_t \cdot k_t$=5649·0,4 =+2260 Nm.

Oké. Miféle erők forgatnak jobbra? Egyszer van a palló saját súlya, amelyről tudjuk, hogy m_p=40 kg, akkor G_p=392 N. Mekkora a lila forgásponthoz viszonyított erőkarja, a k_p? A palló teljes hossza 3,6 m, szintén egyenletes sűrűségű test (mindig ez az alapértelmezés), vagyis a tömegközéppontja középen van, a végétől 1,8 m távolságra. A tömb szélessége 0,8 m, vagyis k_p=1,8−0,8=1,0 m. Ennek az erőnek a forgatónyomatéka $M_p=G_p \cdot k_p$=392·1,0=−392 Nm. Tudod, negatív irányú nyomaték. És a te súlyod, a G_z nyomatéka? A tömeged m_z=50 kg, $G_z=m_z \cdot g$=490 N, k_z=3,6−0,8=2,8 m. A forgatónyomatékod $M_z=G_z \cdot k_z$ =−1372 Nm. Hogy miért lettél "z"? Nem tudtam, milyen betűvel jelöljelek, és gondoltam, "z" jó lesz. Neked is van egy kis szabadságod az elnevezésekben, de ne legyen zavaró, és figyeld meg, hogy a szövegben és a rajzon is világosan látható, hogy mit jelöl.

Most jön a kérdés: állva marad-e a szerkezet így, kutyátlanul, vagy már eleve borul? A forgatónyomatékok összege $M_{össz}=M_t+M_p+M_z$. Külön fejezetben foglalkoztunk ezzel. Most a számértékek az előjelesek, és az jön ki, hogy $M_{össz}$=**+496** Nm. Fellélegezhetsz, mert egyelőre nem billentél a vízbe, a pozitív forgatónyomaték balra forgat.

Légy szíves pontosan végigszámolni az egész eddigit úgy, hogy az ábrán meg is keresed, mi miért annyi.

Álljunk meg egy szóra. Azt tanultuk, hogy a mozdulatlanság egyik alapkövetelménye, hogy a rendszerre ható forgatónyomatékok összege nulla legyen. Ezzel szemben itt +496 Nm, balra forgató nyomaték. Nem nulla. Akkor a rendszer *nem lehet* mozdulatlan. Mi a magyarázat? **…**

Egy forgatónyomatékot kihagytunk a képből. Egy pontosan −496 Nm-es, jobbra forgató nyomatékot. Ami nemcsak a feltétele a mozdulatlanságnak, hanem *a mozdulatlanság érdekében születik*. A tömb alá odarajzoltam, jelzésszerűen egy felfelé mutató zöld nyilat, ami a talaj által a tömb aljára gyakorolt erő. Honnan lett és miért pont ennyi? A tömb nyomja a talajt, de Newton **III**. törvénye szerint akkor a talaj is nyomja a tömböt. Ez utóbbi egy **ellenerő**, amelynek fontos jellemzője, hogy *az aktív erő nagyságához igazodik*. A talaj szilárd, és akármekkora is a tömbön át érkező erő, a talaj ellenerőt hoz létre. Ha odamegy hozzád a kutya, akkor majd csökken a tömb nyomóereje – nem a súlya! –, ha pedig leugrasz a pallóról, akkor nő. A talaj ellenereje mindig pont akkora lesz, hogy a forgatónyomatékok összege pontosan nullára jöjjön ki. Nem szívességből, hanem csak szilárd testként ellenáll az alakváltoztatására törekedő hatásnak, bizonyos határig. Ha a rendszer pontosan félstabilra ki van egyensúlyozva a lila forgáspont körül, akkor a talaj nyomóerejére nincs szükség, ezért az megszűnik. A tömb nincs a földhöz rögzítve, ezért ha a rendszer már billen, akkor a talaj nem fogja visszahúzni.

Jöjjön a kutya. A súlya G_k=120 N, az erőkar k_z, mivel a feladat szerint az öledbe veszed, pont azért, hogy a kutya súlya ugyanott hasson, ahol a tiéd. A kutya forgatónyomatéka 120·2,8=−336 Nm. Ha ezt hozzáadjuk a forgatónyomatékok összegére az előbb kapott $M_{össz}$=+496 Nm értékhez, akkor kijön **+160 Nm**. Ez azt jelenti, hogy amikor a kutya is veled van, a rendszer összes forgatónyomatéka még mindig pozitív, balra forgató, ezért a szerkezet nem fog felbillenni, megmenekültél.

2,8 méteres erőkarral a 160 newton azt jelenti, hogy az egyensúlyban 57 newton "tartalék" maradt. Ha a kutya 120 helyett 177 N súlyú lenne, akkor ott ülnél dermedten, és suttogva kérlelnéd, hogy lehetőleg ne csóválja a farkát, mert csak egy hajszál választ el benneteket a vízbe borulástól.

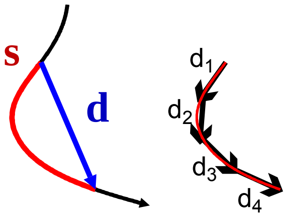
És ha te 60 kg tömegű vagy, a kutya pedig 20 kg, akkor *meddig* mehet el a kutya a pallón, hogy a rendszer ne kezdjen billenni? Próbáld meg önállóan kiszámolni.

A következő fejezeteket a könyv teljes változatában olvashatod:

Haladó mozgás

Amikor valamelyik erő legyőzi a többit.

Út [redacted]



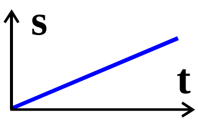
Ez a témakör mozgó testekről szól. A mozgásnak mindig van egy vonala, ennek a vonalnak a neve **pálya**. A pályát a test – a fizikai modelljeinkben, számításainkban sokszor a test tömegközéppontja – járja be. A pályának sokszor megadjuk az irányát is. A számítások során ennek a pályagörbének egy kiválasztott szakaszával foglalkozunk, ez a pályaszakasz a megtett **út**, a jele rendszerint **s**. Az úthoz mindig tartozik egy idő, amely alatt a test az utat bejárta. Ez az idő persze nem lehet nulla.

Egyes esetekben nem számít, hogy a test milyen kanyargós utat jár be, mert a lényeg az út két végpontja közötti távolság, az **elmozdulás**, a jele a rajzon **d**. Ez *mindig* egy egyenes szakasz.

Néha az utat és az elmozdulást valahogy egymással hasonlóvá kell tenni. A MUNKA fogalmának tárgyalásakor fog előkerülni az a probléma, hogy a törvényt az egyszerűség érdekében jó lenne csak a test által megtett elmozdulásra kimondani, de ugyanakkor meg kellene oldani azt, hogy a szabály egy kanyargós útra is érvényes lehessen. A két dolog összehozhatóságának kulcsa az, hogy **az utat rövid elmozdulások összegével közelítjük meg**. Egyenként kiszámítható a munka minden szakaszra, és ezeket összeadva megtudjuk a munkát az egész útra. Hogy ez a gyakorlatban hogyan történhet, most nem érdekes. Annyit jegyezz meg, hogy *elvileg minden út elmozdulások sorozatára bontható*.

Minél kisebb szakaszokra bontjuk az utat, annál pontosabb lesz az azt közelítő elmozdulássorozattal való közelítés, annál közelebb lesz a két hosszúság. A felbontás elméletileg elmehet a végtelenül kicsi szakaszokra bontásig, ami végtelenül kicsire csökkenti az eltérést, de ezt hagyjuk.

Egyenes vonalú egyenletes mozgás



Egyenletes mozgáson azt értjük, amikor a testnek a mozgás kezdőpontjától való távolságában bekövetkező változás és az indulás pillanatától számított időben bekövetkező változás mértéke egymással *egyenesen arányos*, és a hányadosuk állandó. Másképp fogalmazva: **a test által bejárt bármekkora útszakasz és az aközben eltelt idő hányadosa mindig ugyanaz**, ennek az értéknek a neve **sebesség**, a jele $\mathbf{v}$ (velocitas). Tetszőleges időintervallumra (tetszőleges pillanatok közötti időszakra) felírva a változás arányát

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

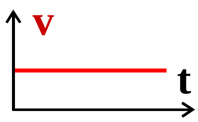
ahol $\mathbf{s}$ a megtett út hossza, $\mathbf{\Delta s}$ ("delta es") az ebben bekövetkezett *változás* mértéke, a mért útszakasz hossza, $\mathbf{\Delta t}$ pedig az ezalatt eltelt idő. A mozgás kezdőpontjától és kezdőpillanatától mért teljes értékekre ugyanez az összefüggés

$$\boxed{v = \frac{s}{t}}$$

a sebesség mértékegysége

$$[v] = \frac{m}{s}$$

Nehogy összekeverd képletet a mértékegységgel!



Egyenletes mozgásnál **a sebesség állandó**. Egyenes vonalú pályán az **út** azonos az **elmozdulás**sal.

Változó sebességgel bejárt útról csak az **átlagsebesség** állapítható meg, amely a végül összesen megtett úthossz és az összesen ahhoz igénybe vett idő hányadosa.

A sebesség **vektormennyiség**, ezért, az erővektorhoz hasonlóan, felbontható két kívánt irányú komponensre, lásd EREDŐ ERŐ.

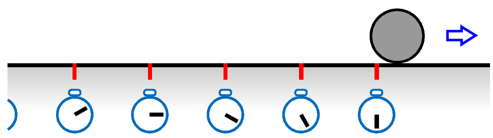
Na itt álljunk már meg egy percre. Mi van? Egyenesen arányos meg intervallum meg delta té? Itt szokott a gond kezdődni, mert az a diák, aki nincs szokva ehhez a nyelvhez, még a második mondatnál tart, amikor a tanár a negyediknél. Eredmény: „Utálom a fizikát."

Ami fentebb olvasható, az színigaz. Ez a tankönyvi verzió, azoknak, akik kevés szóból is értik. De akkor most tegyük egy picit tisztábbá, amíg nem késő.

Az egyenes vonalú mozgást nem kell ragozni, azt mindenki érti. Itt az egyenletességről szól a többi, és elmondja, hogy mit nevezünk sebességnek. Mindannyian tudjuk, hogy mit nevezünk sebességnek, most azt nézzük meg, hogy ezt hogyan határozzunk meg fizikásan, szakszerűen.

Nem kell itt okosság, mondhatod, elindulunk az autóval, elmegyünk valameddig, és megmérjük, hogy ezt mennyi idő alatt tettük meg, a kettőt elosztjuk egymással, és ez a sebesség.

Hát nem így van. Majdnem, de a különbségek döntőek. Először is amikor elindulunk az autóval, akkor kezdetben álltunk, egy idő után pedig már valamilyen sebességgel mentünk. A közte levő időben pedig? Akkor bizony gyorsultunk, növeltük a sebességünket, tehát az nem volt egyenletes, akkor pedig sántít a dolog. Mondhatod azt, hogy az a pár másodperc, amíg beletaposol a gázba, semmi ahhoz képest, hogy aztán milyen sebességgel értél Nagyabonyba. Jó, ez igaz, de a sebesség definíciójának, meghatározásának érvényesnek kell lennie centiméteres távolságokra is. Akkor tehát úgy kell eljárnunk, hogy azt az időt, amíg a kocsi gyorsult, nem számítjuk bele az egyenletes sebességre vonatkozó megfigyelésünkbe. Ezért *is* van Δt és nem csak t. Ez a delta azt jelenti, hogy "változás", talán még inkább "különbség". Vagyis az órát elindítottuk valamikor, megy a *test* (autó, lövedék, tekegolyó, bolygó, versenyteknős, ejtőernyős, teljesen mindegy), és egyszer csak megjelöljük krétával, hogy a test éppen hol van, mi pedig megjegyezzük, hogy az óra pontosan mennyit mutat. A test halad tovább, és egyszer megint húzunk egy jelet, az órát pedig megint megnézzük. A Δt az, amennyi idő közben eltelt, a Δs pedig a két krétajel közötti távolság. Tehát a test már ment egy ideje, az óra is járt, de mi külön megfigyeltünk egy *időintervallumot*, két időpillanat közötti időszakaszt, és kimondjuk, hogy a távolság és az idő hányadosa a sebesség.



Csakhogy ha a sebességet úgy mérjük meg, hogy amennyit autóztál Nagyabonyig, elosztjuk az addig eltelt idővel, az nem árulja el, hogy közben esetleg egy ideig lassabban mentél, valahol pedig gyorsabban. Így te csak az **átlagsebesség**et tudod megmondani. Az **egyenletes sebesség** az, amikor bármikor, bárhol, *bármilyen* rövid időtartamot szemelsz is ki, a két krétajel közötti távolságot és a két időpillanat közötti időtartamot elosztva *mindig* ugyanazt a számot kapod. Tehát a "delta" csak a "különbség"-et jelenti, és nem mondja meg, hogy az a különbség körülbelül mekkora lehet, mert bármekkora lehet. Ha a sebesség egyenletes, akkor az *állandóan* ugyanaz, és nem tudsz olyan időszakot találni, amikor a közben megtett út és az időszakasz aránya ettől eltérne. Ha ez tényleg így van, akkor már megteheted azt az általános megállapítást, hogy az út osztva az idővel a sebesség, a kezdőponttól a végpontig, egyenletesen.

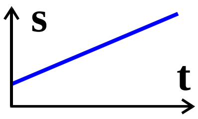
Ha ügyelsz arra, hogy a krétajeleket pontosan azonos időközönként húzd meg, akkor egyszerűsödik a dolog, az állandó arány az állandó Δt következtében állandó Δs-t fog eredményezni, magyarul a jelek távolsága pontosan egyforma lesz, ahogy az ábrán látod. *Bármilyen* időközre, egészen kicsire is. Akkor a sebesség tényleg egyenletes.

Ha már tudod, hogy a sebesség egyenletes, akkor lehet az egyik jel az indulásnál, az óra 0-ról indul. A másik jelnél $\mathbf{t}$ valamennyi, $\mathbf{s}$-t pedig leméred, és a sebesség egyszerűen $\mathbf{v=s/t}$.

Az egyenes arányosság pedig, és ezt jegyezd meg, mert máskor is lesz ilyenről szó, azt jelenti, hogy ha veszel egy időszakot, megnézed az utat és időt, elosztod egymással, kapsz egy számot, ez a sebesség, ugye. Ha veszel kétszer akkora időt, veszed a közben megtett utat, elosztod őket egymással, és ugyanazt a számot kapod, mert az út is kétszeresére nőtt, vagyis az út és a sebesség közötti *arány* ugyanaz marad. Ha egy derékszögű koordinátarendszerben az egyik tengelyen van az idő, a másikon az út, és berajzolod azokat a pontokat, amelyek mindig az időhöz tartozó utakat jelölik, akkor ezek a pontok egyenes vonalat hoznak létre, vagyis *az arányosság egyenes*, az összefüggés, a függvénygörbe *lineáris*. Ahogy a fejezet elején láttad.

Mi az átlagsebesség? Mit jelent a Δt?

Nem mindig lesz a függvény egyenese olyan, hogy pont az origótól indul, a (0;0) ponttól. Ha az utat nem nullától, hanem, mondjuk, 3 métertől kezdve számoljuk valamiért, akkor a 0 másodpercben az út 3 méter, tehát a vonal innen indul, a többi már megy szabály szerint. Lehet az is, hogy az idő indul nem nulláról, indulhat akár negatív számról is, teljesen mindegy.



Az $s–s_0$, $t–t_0$ jelöléseket is nézzük meg. Ez a valami$_\mathbf{0}$ mindig a kezdőértéket jelenti, útban, időben, elfordulási szögben, bármiben. A sima **s** pedig azt az utat jelenti, amit a másik mérési pillanatban veszünk annak, azt a pillanatot pedig **t**-vel jelöljük. Bármi lesz is **t** értéke, az **s** az *ahhoz tartozó* **s**. Épp ezért szokás néha úgy is jelölni, hogy az az $\mathbf{s}_t$. Ezt mondják úgy is, hogy az **s** a **t** szerinti **s**. (Bármi legyen is a **t** értéke.) Vagyis a sebesség bevezető definíciója akár így is kinézhet:

$$\frac{s_t - s_0}{t - t_0} = v$$

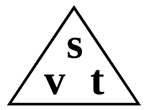
Ha a feladat azt mondja, hogy megmérjük a 3. és 6. másodperc közötti utat, akkor megteheted azt, főleg ha másik út is szerepel még a feladatban, hogy azt írod: $\mathbf{t}_1$=3, $\mathbf{s}_1$= annyi, amennyi. És ezután a $\mathbf{t}_1$-et használod a számításaidban, amikor erre az időszakaszra gondolsz. Bevezethetsz saját jelöléseket, de akkor el ne felejtsd leírni azt, hogy mit jelölsz azzal. Méghozzá az az igazi, ha szöveggel is leírod, elég néhány szó, így elegáns, érthető, és a tanár azt mondja, hogy nohát. Ami azt jelenti, hogy ezt nem is gondolta volna rólad, és ez esetleg picit megbocsátóbb hangulatot ébreszthet benne egy későbbi hibád kapcsán.

Sőt, olyat is megtehetsz, hogy ezt az utat így jelölöd: $\mathbf{s}_{3\text{-}6}$ vagy $\mathbf{s}_{36}$, segít megkülönböztetni más úttól. Márpedig a feladat megoldásakor az az alapvető cél, hogy te magad is megértsd, amit írsz, és a tanárnak se kelljen azon gondolkodni, hogy mit is akartál itt jelezni.

Nos, akkor most azt javaslom, hogy olvasd el ezt az eszmefuttatást még egyszer, aztán ha ez rendben van, kezdd elölről a fejezetet, most már remélhetőleg a tankönyvi verzió könnyebben fogyasztható. Kóstolgasd, szokd, mert az sem baj ám, ha a tankönyvedet is érted.

Aztán pedig térjünk vissza a kicsit fizikásabb nyelvhez.

A **v=s/t** képlet **s=v·t** vagy **t=s/v** alakra is átrendezhető. A megtett út attól függ, hogy mekkora sebességgel mennyi ideig haladt a test. Az útra felhasznált idő attól függ, hogy az utat mekkora sebességgel tette meg, ez utóbbinál a nagyobb sebesség kisebb időt eredményez. Ismered a trükköt a háromszöggel? Akkor csak az egyik képletet kell megtanulnod.



A sebesség másik gyakran használt mértékegysége a km/h:

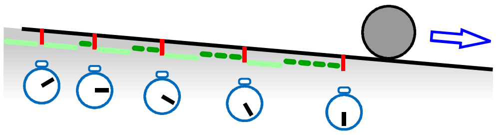
$$1\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1 \cdot \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = \frac{1}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}27778\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad 1\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Egy test sebességén az egyszerűbb kinematikai feladatokban a test *tömegközéppontjának*, vagyis a testet helyettesítő **tömegpontnak** a sebességét értjük. Ha a test mozgás közben forog is, akkor ugyan a különböző pontjainak a pályaegyeneshez viszonyított sebessége nem egységes, gondolj egy guruló labdára festett pontokra, de ez az *egész* test haladásának vizsgálatakor nem számít.

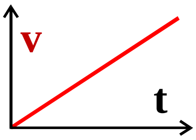
Az egyenes vonalú egyenletes mozgás csak egy alapvető elméleti, kiindulási elv, hajszálpontosan ezt a valóságban soha nem figyelhetjük meg, még a látszólag minden zavartól mentes világűrben sem, mert még a Naprendszer távoli sarkában is észlelhető a Nap gravitációja, ami még ott is megváltoztatja a test haladási irányát. De kisebb távolságokon az űrben, súlytalanságban meglökött test útja, vagy egy márványlapon meglökött súlyos acélgolyó útja bátran tekinthető egyenesnek és egyenletes sebességűnek is. A hétköznapi életben számos mozgást akadályozó tényező működik, ilyenek a súrlódás vagy a légellenállás, a mozgás fenntartásához ezeket is le kell győzni.

Gyorsulás

Gyorsulásnak nevezzük a sebesség változását. Mivel a sebesség vektormennyiség, ezért az megváltozik akkor, ha **a nagysága változik** (nő vagy csökken), de akkor is, ha **az iránya változik meg**. Ezért egy autó, a szót fizikai fogalomként használva, akkor is *gyorsul*, ha a vezető gázt ad, akkor is, ha fékez. De akkor is, ha csak kanyarodik! Mert ekkor a sebesség változik, mivel az iránya változik.



A legegyszerűbb esetben gyorsulásnak nevezzük azt az *egyenes vonalú* pályán történő mozgást, amikor a test által azonos időegységek alatt megtett út mindig ugyanannyival nő. Figyeld meg, hogy itt az óra egyenletesen jár, és minden jel eggyel több hosszúságú, mint az előző. A világoszöld csík az első mért útszakaszt jelzi, a sötétzöldekből pedig mindig eggyel többet kell hozzátenni. Ez az út hossza.



Amikor az út hossza mindig ugyanannyival nő, de az időpillanatok egyenletesek, akkor a sebesség nő, mindig ugyanannyival. **A sebesség egyenletesen nő**. Így tehát itt az egyenletes sebességű mozgás mintájára (hasonlítsd össze) a test által bejárt bármekkora útszakasz *átlagsebességének* és az aközben eltelt időnek a hányadosa mindig ugyanaz, ennek az értéknek a neve **gyorsulás**, a jele **a** (acceleratio). Tetszőleges időszakaszra felírva a változás arányát:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t - v_0}{t - t_0}$$

ahol **v** a tömegpont sebességét jelenti általánosságban, a **t** pedig az időt. Gyorsuláskor a sebesség változik, és a **Δv** a változást, a kezdeti és végsebesség különbségét jelenti, a **Δt** az órán közben leketyegett időszakasz hosszát.

> Ez a tankönyvi verzió. Ha ennek a megértése nem sikerült, akkor fuss neki még egyszer. És nézegesd az előző fejezetet, tanulgasd a nyelvezetet annak a segítségével. Szükséged van arra, hogy ez ne legyen teljes homály, különben az órákat végig fogod unatkozni, az idődet pazarolva.

A delta, a "változás" jelzésének használata mindig akkor válik szükségessé, amikor a képlettel leírt mennyiség (itt a gyorsulás) *nem egyenletes*, és ezért a folyamatot *kis szakaszokra bontva* kell néznünk. A gyorsulás **a=v/t** képlete ez esetben mindig csak egy ilyen szakaszra érvényes, mert csak egyenletes sebességváltozásra igaz. A képlet deltás alakja elméleti jelentőségű, és ha tudod, hogy a gyorsulás egyenletes, akkor nem kell ezen törni a fejedet.

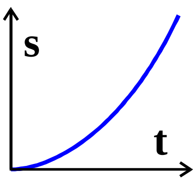
Felírtam ugyanazt másképp is, érthetőbben, egyetlen szakaszra, ahol $\mathbf{v_0}$ és $\mathbf{t_0}$ a szakasz kezdeti pontjában mért sebesség és az óra által mutatott idő, a **t** a szakasz végénél az óra által mutatott idő, $\mathbf{v_t}$ pedig az ebben a pillanatban, a **t** időpontban mért sebesség. A $\mathbf{t-t_0}$ a két pillanat között *eltelt* idő, ez bármilyen rövid lehet. Ha a sebesség növekedése eközben egyenletes volt, akkor az **a** gyorsulás arra a szakaszra a képlet szerint kiszámítható. Az egész út pedig, ha közben a gyorsulás változik, ilyen szakaszokból összerakható.

Ha a kezdőpillanatban az idő és a sebesség is 0, és a sebesség változása egyenletes, akkor:

$$a = \frac{v}{t}$$

a gyorsulás mértékegysége pedig, ahogy az *a képletből is következik:* (m/s)/s, azaz

$$[a] = \frac{m}{s^2}$$



Az egyenletesen gyorsuló mozgásban **az út és az idő egymással négyzetesen arányos**, emiatt a kettő kapcsolatát leíró görbe *parabola*. A *sebesség* és az idő viszont egyenesen arányos, a függvény lineáris, lásd fentebb.

A gyorsulás **vektormennyiség**, ezért, az erővektorhoz hasonlóan, felbontható két kívánt irányú komponensre, lásd EREDŐ ERŐ.

A lassulás is gyorsulás. Hogy ne kelljen állandóan a gyorsulás mellett megemlíteni a lassulást is, ezért tisztázzuk, hogy a gyorsulás, a sebességváltozás értéke, az **a** negatív számértékű is lehet, és ezzel a dolog sokkal egyszerűbbé válik.

$$v = a \cdot t \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{v}{a} \qquad\qquad s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \;\left(= \frac{v}{2} \cdot t \right)$$

Miért kell a per kettő?! Matematikailag nem jön ki a másik két képletből. A válasz picit homályos lesz: a gyorsulás és a sebesség is egy 0-ról induló mérés *végén* ennyi, az út viszont mérés *folyamán*, a 0 és a mérési pont között, emiatt a két ponton mérhető sebességet átlagolni kell. Ha ezt nem érted, nem baj, csak tanuld meg a képletet jól, és használd ezt, amikor kell. Azért kell több képletet tudnod, mert az egyik feladatban az utat kérdezik, a másikban a sebességet stb., és mindre legyen képleted. A képleteket levezetheted egymásból, ha tudod, de az út *ebben az esetben kivétel*.

Gyorsuláskor mi lineáris és mi parabolikus?

Gyorsulás kezdősebességgel

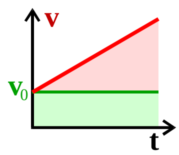
Vannak esetek, amikor a test a gyorsulás megkezdése előtt már egy bizonyos egyenletes sebességgel mozgott. A gyorsulás sebességváltozás, ezért a sebesség a *kezdősebesség*ből indul, és a gyorsulás innen indulva változtat rajta. A gyorsulással álló helyzetből megtehető úthoz mindig hozzá kell adni azt az utat, amelyet a test gyorsulás *nélkül* megtenne. Összesítve

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \leftrightarrow \quad v = v_0 + a \cdot t \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \leftrightarrow \quad s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \qquad \begin{bmatrix} a \rightarrow \\ v_0 \rightarrow \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{a}$ a gyorsulás, $\mathbf{s}$ a mozgás során megtett út a $\mathbf{t}$ időpillanatig. A $\mathbf{v_0}$ a gyorsulás megkezdődésének pillanatában érvényes sebesség, más szóval a kezdősebesség. A $\mathbf{t}$ a mérés közben eltelt idő (tehát az órát nulláról indítottuk). A korábbi képletetek ezek speciális esetei voltak, amikor a $\mathbf{v_0}$ értéke 0, mert a test álló helyzetből indult. Tanuld meg az összetettebb képleteket, és ha a feladatban a $\mathbf{v_0}$ kezdősebesség 0, akkor az majd eltűnik és kész.

Ne tévesszen meg, a $\mathbf{v_0 \cdot t}$ nem a gyorsulás megkezdés*éig* megtett út! Hanem az az út, amit a test az egyenletes sebességgel tenne meg, a képlet másik fele pedig ehhez hozzáadja azt a többletutat, amit maga a gyorsulás okoz. A kettő összege kell nekünk.



A képletek mögé kitett tett zárójeles dolog arra hívja fel a figyelmedet, hogy a kezdősebesség és a gyorsulás iránya azonos. Ezért nem is kell az előjelükkel foglalkozni.

A kezdősebesség és a gyorsulás iránya lehet ellentétes is. Ilyenkor a $\mathbf{v_0}$ és az $\mathbf{a}$ előjele ellentétes. Hogy melyik a pozitív, az végül is csak szemlélet dolga, és ha a feladat nem írja elő, akkor választhatsz. Ha feldobsz egy labdát, akkor érezheted célnak a minél magasabbra dobást, pozitívnak véve a felfelé irányt, és negatívnak a labdát visszafordító, "akadályozó" gyorsulást, aminek hatására a labda egy idő után egyre gyorsabban "hátrál". Vagy veheted úgy, hogy felfelé a labda csak "hátrálva lendületet vesz", és a zuhanás az igazi, a pozitív mozgás. Mindegy. De
1) Írd le a megoldásban, és jelöld be a rajzban is, hogy melyik irányt veszed pozitívnak, mert a tanárnak is tudnia kell róla.
2) Következetesen és szigorúan tartsd magad hozzá az összes számításodban, különben rossz eredményeket fogsz kapni.

Ha $v_0=-3$, $v=8$, akkor mennyi a $v-v_0$? $8-(-3)=8+3=11$!

Ha a kezdősebesség és a gyorsulás iránya és előjele ellentétes, akkor az *út* kiszámítása külön figyelmet igényel. Tegyük fel, hogy feldobsz egy labdát 4 m/s kezdősebességgel. Pozitív iránynak most a felfelé irányt veszem. A (nehézségi) gyorsulás $-10\ m/s^2$, lefelé mutat. Tizedmásodpercenként kiszámítom $\mathbf{s}$ értékét: 0,1 másodpercnél 4·0,1+(−5)·0,01=**0,35** m, 0,2: **0,6** m, 0,3: **0,75** m, 0,4: **0,8** m, 0,5: **0,75** m, 0,6: **0,6** m, 0,7: **0,35** m, 0,8: **0** m, 0,9: **−0,45** m, 1,0: **−1** m.

Ezt a vesződséges módszert persze feladatmegoldáshoz használni szamárság lenne, most csak a folyamat nézegetésére adtam meg az értékeket.

Mit mutat a számsorozat? A labda egyre feljebb száll, a megtett útja egyre nagyobb, de eközben a sebessége egyre kisebb lesz, lassul. Aztán 0,4 másodpercnél eléri a tetőpontot, a *holtpontot*, a labda sebessége 0 lesz, majd lefelé fordul, és elkezd lefelé gyorsulni. A számítást a gyorsuló mozgás során az út kiszámítására megadott képlettel végeztem, szabályosan. Nézzük csak tovább: 0,6 másodpercnél az út már csak 0,6 méter, holott a labda már a holtpontig is megtett 0,8 m utat, és most azt folytatja lefelé. Ha 0,8 másodpercnél megkérdezik, hogy a labda mekkora utat tett meg, a képlet szerint az lenne a válasz, hogy *nulla hosszúságú utat*. Ami nem igaz, hiszen valójában oda-vissza megjárt összesen 1,6 métert. Sőt, ez után az útja lefelé folytatódik, és már negatív úthosszokat látunk. Ez így nem lesz jó.

Amíg a test mozgása azonos irányú, az út ismert képlete jól használható, egészen a megállásig. De ha a test az útján visszafordul, onnantól másféle számításra van szükség.

És ha ferdén felfelé, ívben dobom a labdát? Az későbbi fejezet témája, most még mindig csak az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásról beszélünk.

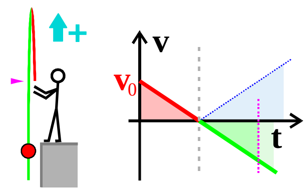
Mit kaptunk az előbbi számításból a labda feldobásakor, ha nem az utat? A kiindulási ponttól való távolságot, más néven az *elmozdulást*. Nézd meg a témakör legelső fejezetét.

Visszafordulásos mozgás során a test sebessége a holtpontban 0, majd a sebesség előjelet vált. Ilyen mozgás esetében *az út képletéből* a test által megtett út (s) helyett a test elmozdulását (d) kapjuk meg.

Mi a helyes módszer az út kiszámítására ilyen esetekben? **Ketté kell bontanunk a mozgást:** az első szakasz tart a holtpontig, a test megállásáig, a második szakasz az ez utáni, ellenkező irányú mozgás. Ha a test újból lelassulna és megállna, ott újabb szakasz kezdődne. Az utat minden szakaszra külön kell kiszámolni, majd azokat összeadni.

Mi van, ha a mozgásnak egy olyan pillanatát kell megnéznünk, amikor a test még nem fordult vissza? Akkor nincs második szakasz, nincs probléma sem. Használjuk a szokásos képleteket.

A diagramon a piros-zöld egyenes a labda sebességét mutatja előjelhelyesen. A sebesség $\mathbf{v_0}$-nál kezdődik, és egyre kisebb lesz. *Gondolkozz el alaposan azon*, hogy **ha felfelé van a pozitív irány, és a zöld pályaszakaszon leeső labda egyre gyorsabban halad, akkor valójában egyenletesen *csökken* a sebessége.** Képzeld magad elé, hogy mit mutatna a labda sebességmérő órája, miközben lefelé "tolat".



Egy olyan diagramon, amely a sebességet ábrázolja, mindig a függvényvonal és a t tengely által közrefogott terület mérőszáma az út. Most a test sebessége előjelet vált, ezért a piros és zöld területek összege minden t pillanatban csak az elmozdulást adja meg. Amíg a piros terület nagyobb, addig az összeg pozitív, vagyis a labda még a kiindulási pont fölött tart, a negatív elmozdulás már a kiindulási pont alatti helyzetet jelzi. Ha az elmozdulásnak mindig az abszolút értékét vesszük, amivel a zöld területet a kék területté tükrözzük, akkor kapjuk meg a területek t pontig tartó összegeként az utat. Ez lenne a jó matekosok verziója, és csak azért mondtam el, hátha jó matekos vagy. Miért is ne lehetnél? *De inkább nézzük a dolgot valahogy érthetően.*

Meddig tart az első szakasz? Nos, ez a lényeg. A test megtett t_1 idő alatt s_1 utat. A szokásos képleteket kell használni, a fogódzó mindig az, hogy a megállás pillanatában $\mathbf{v}=0$.

Mi a helyzet a második szakasszal? Az csak egy szabadesés 0 kezdősebességgel. Vigyázz, annak a kezdőpontja nem a feldobás helye, hanem a holtpont helye, és a test már megtett t_1 idő alatt s_1 utat.

Mennyi idő alatt tesz meg az 5 m/s sebességgel feldobott labda 2 méter utat? Milyen magasan lesz ekkor, ha a feldobás 1,2 m magasról indul?

A mozgást két részre bontjuk, és meg kell tudnunk, hogy milyen hosszú az első útszakasz. A pozitív irány legyen megint felfelé. Az első szakasz egyenletesen lassuló, a gyorsulás a nehézségi gyorsulás, −10 m/s^2. Mennyi *idő* alatt ér a labda a holtponthoz? A sebesség azon a helyen **0**, ezért $t_1=-v_0/a$, nézd meg a gyorsulás alapképleteit. Behelyettesítés után az első útszakasz idejére 0,5 másodpercet kapunk.

Mekkora utat tesz meg a labda ezalatt? $s_1=v_0\cdot t_1+(a/2)\cdot t_1^2$, az eredmény 1,25 m. Valójában kétismeretlenes egyenletrendszerként használtuk a két képletet. Tovább tartott ezt kimondani, mint megcsinálni, igaz? Ennyit a matekozástól való kötelességszerű parázásról.

Megjegyzés: *A gyorsulás nem mindig 10!* Visszafordulós gyorsuló mozgást nem csak a feldobott testnél tapasztalhatunk, a visszahúzó erő lehet egy rugó ereje vagy a vízbe ugró emberre felfelé ható felhajtóerő is, ezek értékét a feladat adja meg.

Az eredmény kevesebb, mint a kívánt 2 méter, ebből tudjuk, hogy a mozgásnak 2. szakasza is van, a labda visszafordul. A kérdés az összidő.

A labda megtett már 1,25 m utat, Az előírt 2 méterig megteendő még 0,75 m. Szabadesés következik, mennyi idő alatt esik ennyit egy test?

$s_2 = \frac{a}{2} \cdot t_2^{\,2}$, ahol a t_2 a második útszakasz ideje.

$$0{,}75 = \frac{-10}{2} \cdot t_2^{\,2} \quad \rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{0{,}75}{-5}}$$

No, itt van egy kis probléma, *a gyökjel alá negatív szám került*, −0,15 s. Ez kiszámíthatatlan, az eredménye ugyanis nem valós szám. Most egy pici rugalmasságra van szükség. Ebben az útszakaszban, csak az útszakasz hosszának kiszámításában függetlenítheted magad az előjelezéstől. Álló helyzetből esik egy test, a helyzet egyszerű, mi se komplikáljuk, az idő 0,15 gyöke, 0,39 s.

A feladat első kérdésére a válasz: az összes idő 0,5+0,39=**0,89** másodperc.

A feladat második kérdése ez volt: Milyen magasan lesz a labda ekkor, ha a feldobás 1,2 m magasról indul?

A labda indult 1,2 m magasról, felfelé megtett 1,25 métert, aztán lefelé 0,75 métert, vagyis most van 1,2+1,25−0,75=**1,7** m magasan.

Ezen a ponton mennyi a labda *elmozdulása* a kezdőponthoz képest? 1,7−1,2=+**0,5** m.

A visszafordulós mozgásnál tehát az utat két külön kiszámított útszakasz összegeként kerestük meg. Kiszámoltuk az első szakasz idejét, ebből megkapjuk az úthosszát. Ha kiderül, hogy a feladat ennél rövidebb útra vonatkozik, akkor ezt az eredményt dobjuk, majd egyszerűen megoldjuk a feladatot. Ha pedig a mozgás hosszabb, akkor a visszafordulási ponttól egy új, önálló gyorsuló mozgásként kezeljük, és nem felejtjük el az előző szakasz idejét és útját sem.

Másik feladat jön, a számítás egy kicsit nehezebb.

A feldobás után mikor lesz a labda 0,7 méter magasan, a kiindulási ponthoz képest? A kezdősebesség felfelé 5 m/s.

A kérdés most nem az utat tudakolja, hanem az időt, megadva hozzá tulajdonképpen az *elmozdulást*, a kiindulási ponttól mért távolságot. Azt mondtam, hogy visszafordulós mozgásnál az út képlete az elmozdulást adja meg, akkor használjuk azt.

$$(s =)\ \ d = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$0{,}7 = 5 \cdot t + \frac{-10}{2} \cdot t^2$$

ahol pozitívnak vettük a felfelé irányt. Ebből kapjuk a $-5t^2+5t-0{,}7=0$ alakú MÁSODFOKÚ EGYENLETet, amit a Matek témakörben levő fejezet segítségével megoldva t-re *két* értéket kapunk: 0,168 s és 0,832 s. Valóban, a labda kétszer is eléri ezt a magasságot, felfelé, majd lefelé is.

Hol lesz a labda 3 másodperc elteltével?

Figyelj jól: nem azt kérdezem, hogy mekkora utat tesz meg ennyi idő alatt, hanem hogy hol lesz. Más támpont híján nyilván a kiindulási ponthoz viszonyítva. Elmozdulás. Behelyettesítünk a fenti képletbe, kapjuk, hogy −30 méter. A kezdőmagasság alatt lesz, mivel a negatív irány lefelé van. Ellenőrizzük: felfelé 0,5 s alatt 1,25 m, majd onnan lefelé 2,5 s alatt 31,25 m, összesen 30 m. *Gyakorold a számológéped használatát is, további értékek kiszámításával, dolgozatíráskor ne azzal menjen el az időd.*

A tehetetlenség törvénye [redacted]

Ha erőmentes, ideális térben, súlytalanságban egy testet meglökünk, akkor utána az egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, sebességváltozás nélkül, akár az idők végezetéig. **A test magától nem lassul le és nem is gyorsul.** Erről gondoskodik a test **tehetetlenség**e, egy olyan jelenség, amely <u>minden</u> tömeggel rendelkező testre érvényes.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye) kimondja, hogy

> **Minden pontszerű test megtartja a mozgásállapotát, amíg egy külső erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.**

A változatlan mozgásállapot az a semleges, erőmentes állapot, amikor a test mozog, de **a mozgása egyenes vonalú, állandó sebességű**. A tükörsima felületen meglökött golyó "nyugodt" állapota, amelyik egyszerűen csak gurul. És ha a test áll? Tulajdonképpen az álló helyzetben levő test is egyenletes sebességgel mozog, *csak a sebessége 0*. Ez először hülyeségnek hangzik, de ha ezt a megközelítést elfogadjuk, akkor megszabadulunk attól a kényszertől, hogy az álló helyzetet mindig külön kezeljük, ami a feladatok megoldását és a fogalmak továbbgondolását is leegyszerűsíti. Később látni fogjuk, hogy a nulla sebesség csak viszonyítási rendszer kérdése.

A semleges, változatlan mozgásállapotú testre azt mondjuk, hogy **nyugalomban, nyugalmi helyzetben van.** A nyugalmi helyzetben levő testre mondják azt is, hogy „tökéletesen magára hagyott test”.

A mozgásállapotot nem befolyásolja a test *forgása*, a pályán mindig a test tömegközéppontja halad, a példák mindig **pontszerű tömegre vonatkoznak**, ha a feladat a test kiterjedésére külön nem tér ki. Vagyis az űrhajóban lebegő űrhajós, ha ellöki magát a faltól, akkor is egyenes vonalban, egyenletes sebességgel halad, ha közben elkezd szaltózni, mert a *tömegközéppontja* végig ugyanazon a vonalon fog haladni, a mozgásállapota nem változik, és fizikai szempontból nézve nyugalmi helyzetben van.

> **Ha a nyugalomban levő test mozgásán, mozgásállapotán változtatni akarunk, akkor az ennek ellenáll, ez az ellenállás a test tehetetlenségének a megnyilvánulása.**

Amíg a test sebességén (sebességvektorán) nem próbálunk változtatni (gyorsítani, lassítani, kanyarodásra kényszeríteni), addig a tehetetlenséget nem is vesszük észre. **Lehetséges a változtatás, de ahhoz a testre erőt kell kifejtenünk.** Az ERŐ definíciójából következik, hogy ezt az erőt mindig *egy másik testnek* kell létrehoznia, akár közvetlen érintkezéssel, akár egy erőtér közvetítésével, ilyen értelemben erőtérnek számít a tömegvonzás is.

Minél nagyobb a test tehetetlensége és minél nagyobb az elérni kívánt változás, annál nagyobb erőre van szükség. **A test tehetetlensége egyenesen arányos a tömegével.** Úgy is mondhatjuk, hogy **a tehetetlenség a tömeg megjelenési formája**.

Megjegyzés: Az elméleti fizikusok számára fontos, hogy valami univerzális és a többi elmélethez illeszkedő elméletet alkothassanak válaszul arra a kérdésre, hogy mi a tehetetlen tömeg *oka*. A jelenleg legelfogadottabb elmélet szerint a térben mindenfelé ott levő Higgs-részecskékből álló részecskemező "sodrása" adja meg a magyarázatot, és ennek a részecskének (Higgs-bozonnak) a létezésére 2012-ben sikerült kísérleti bizonyítékot is találni.

Inerciarendszer

Egy mozgó test pályáját csak úgy tudjuk megfigyelni és leírni, ha rögzítjük azt a **vonatkoztatási rendszer**t, amelyhez viszonyítva a mozgás megtörténik. **Mozogni mindig csak valamihez képest lehet.** Ha lebegnél a teljesen üres Univerzum közepén, és egyáltalán nem látnál magad körül egyetlen csillagot sem, semmiféle megjegyezhető pontot, akkor valójában nem lenne értelme annak a szónak, hogy te *haladsz* valamerre.

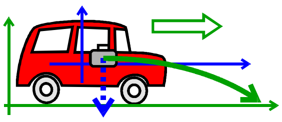
Egy térbeli vonatkoztatási rendszernek van **egy alappontja és három alapiránya**, amelyek a három térdimenzió irányát rögzítik. A koordinátarendszer nem azonos ezzel, mert annak csak az a célja, hogy számszerűen megadhatók legyenek a pálya pontjai és a test helyzete, sebessége, márpedig koordinátarendszerből is van sokféle, derékszögű, logaritmikus, polár, szférikus, hiperbolikus stb. A vonatkoztatási rendszer ezek helyett csak egy megállapodás, egy nézőpont, azért, hogy az "innen oda" mindenki számára érthető legyen.

A vonatkoztatási rendszereknek azt a csoportját, amelyben érvényesül a tehetetlenség törvénye, inerciarendszernek nevezzük (inertia latinul tehetetlenség)**.**

Eddig a tananyag. A többi csak izgalmas. Velem tartasz? Egy inerciarendszerben elfoglalt helyzetet vagy az ott végzett mozgást megfigyelhetjük egy másik inerciarendszerből is, ami ehhez képest máshogy áll, esetleg még mozog is. Ha a test mozgása az egyik rendszerben egyenes vonalú egyenletes mozgás, akkor a másikban is annak fogjuk látni, legfeljebb a sebességének a nagysága és iránya lesz más. Ha egy vonaton utazunk, akkor az elsétáló kalauz mozgását egyenes vonalúnak és egyenletesnek látjuk. Ha pedig valaki ugyanezt a vágány mellett állva nézi, akkor *ő is*. Azért, mert maga a vonat szintén valamilyen egyenes vonalú és állandó sebességű mozgást végez a külső megfigyelő szemével nézve. A kalauz a két megfigyelő szerint más sebességgel halad (talán más irányba is), de egyenesen és egyenletes sebességgel. A két nézőpontot ezért fizikai szempontból egyenértékűnek, *ekvivalens*nek, egymásba egyszerűen átszámíthatónak tekinthetjük.

Sőt, annak a kijelentésnek, hogy egy test "áll", csak annyi az értelme, hogy egy adott inerciarendszer pontjaihoz *képest* áll. A kalauz is állhat a vonaton, de a földhöz rögzített rendszerben ez a kalauz mozog. De az is lehet, hogy a vonaton a kalauz hátrafelé szalad, és ha a vonat pont ugyanakkora sebességgel megy, akkor a sín mellett álló szemlélő azt látja, hogy a kalauz *hozzá képest* áll, pedig az utas azt látja, hogy a kalauz fut. Ugyanígy nincs értelme kijelenteni azt, hogy valaki "jó" irányban áll, mert az attól függ, hogy honnan nézzük. Nekünk a nehézkedés iránya, a gravitáció kijelöl egy praktikus függőleges irányt, de ha eltűnne a gravitáció, akkor kiderülne, hogy ez is csak egy irány a végtelen sok egyformán használhatóból.

Egy test helye és helyzete is viszonylagos. Attól függ, hogy mit választunk a megfigyeléséhez vonatkoztatási rendszernek.



Ha te mész az úton egy kocsival, és az ablakon kiejtesz egy pénzzel teli táskát, akkor azt látod, hogy a táska egyenes vonalban lefelé esik, mert benne van az autóval felvett vízszintes lendülete, és megy veled. Te a te vonatkoztatási rendszeredben, amit kék koordinátatengelyekkel jelöltem, csak elejtetted a táskát, és elvárható, hogy az egyszerűen leessen, pont ugyanúgy, mint amikor a földön állva ejted el. Az "állás" fogalma már nem abszolút, nem valami speciális, kitüntetett állapot, mert az a megfigyelőtől függő, relatív dolog. Amikor a táskát fogod, akkor hozzád képest a sebessége nulla, és amikor elejted, akkor a táska leesik, függőlegesen lefelé. A leesés az $f(x)=x^2$ függvénnyel leírható, egyenletesen gyorsuló mozgás. A leesés végén a táska hirtelen hátrafelé kezd mozogni.

Az emberrabló, aki az árokból figyeli a táskát, azt látja, hogy az ő (zöld) vonatkoztatási rendszerében az autó vízszintesen mozog, és először a táska is vele azonosan mozog. Majd amikor elejted, akkor ő azt látja, hogy a táska egy hosszú parabolapályán a földre esik. A leesés végén a táska megáll. A parabola is az $f(x)=x^2$ függvénnyel írható le, ezt már tudod matekból. A táska mozgása a két nézőpontból nem azonos, de egyenértékű, csak a mozgás vízszintes összetevője eltérő, a függőleges nem. Egyik sem "igazibb" a másiknál. A kék vonatkoztatási rendszer egyenletes sebességgel mozog a zöld rendszerben, és a táska mozgása ezek különbségével megmagyarázható.

A rendőr, aki a bokorból figyeli az egészet, hiányzott az iskolából, amikor a parabolát tanulták, de szeretné megérteni a táska mozgását. Ezért beleképzeli magát az autóba, és rájön, hogy a táska onnan nézve csak lefelé esett, és a mozgást így sokkal egyszerűbben tudja elmesélni a kollégájának.

Egy mozgás többféle inerciarendszerben, több szemszögből nézve is leírható.

A dolog csak elhatározás kérdése. Ha valamiért azt akarjuk, hogy egy repülőgép ülésére tett laptop a számításhoz használt vonatkoztatási rendszerünkben álljon, akkor rögzítsük a vonatkoztatási rendszert a repülőgéphez. Úgy, hogy elképzeljük, hogy mi a gépen ülünk, és onnan figyeljük a laptopot. Ha azt szeretnénk, hogy a laptop a mi rendszerünkben valamilyen irányba mozogjon, akkor képzeljük magunkat egy másik repülőgépre, amely úgy halad, hogy a laptop mozgása *abban a rendszerben* nekünk megfelelő legyen.

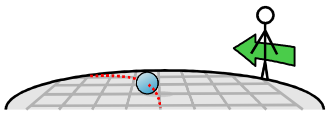
Hogy mi az értelme ennek? A másik vonatkoztatási rendszerben esetleg érthetőbb, egyszerűbben leírható egy újabb test mozgása, ami az előző rendszerben bonyolultabb számítást követelne. Vagyis lehet, hogy egy másik vonatkoztatási rendszer választása számunkra *kényelmesebb*. Nem kell rögtön matematikai formulákra gondolni, egyszerűen csak a megfelelő helyre képzeljük magunkat, és gondolatban onnan nézzük a dolgokat.

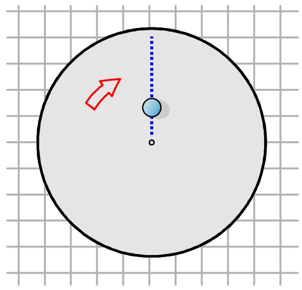
Szoktál te is ilyet csinálni. Ha egy sisakkamerával vagy egy autó belső kamerájával készült videót látsz, akkor áthelyezkedsz az ahhoz tartozó vonatkoztatási rendszerbe. A szemed helyett ilyenkor csak az eszeddel tudod, hogy amikor az autóvezető ugrál az ülésen, akkor valójában az út hepehupás.

Mi a közös a kalauz mozgásában az utas és sín mellett álló megfigyelő számára?

Még egy vonatos példa, amivel már te is találkozhattál. A vonat áll az állomáson, te ülsz az ablak mellett, mellettetek áll egy másik vonat. Kicsit sokáig álltok, de aztán végre megindultok, lassan mentek el a másik vonat mellett, majd végleg elhagyjátok, aztán azt látod, hogy az állomás meg nem mozog. Öö, bocs, nem mi mentünk, hanem a másik vonat a másik irányba. Ugye hogy történt veled is ilyen? Ugye hogy teljesen úgy nézett ki, mint amikor a te vonatod megy? Az a kis rándulás az elején, az elmaradt, de erre fel sem figyelünk, annyira meggyőző az, amit a szemünk lát. Azt hitted, hogy te mozogsz a másik vonat és az állomás vonatkoztatási rendszerében, pedig a másik vonat mozgott a te vonatkoztatási rendszeredben. A kettő megtévesztően egyforma is tud lenni.

Az egyenes vonalban egyenletes sebességgel haladó, nem forgó vonatkoztatási rendszer inerciarendszer. Nem azonos, de egyenértékű azzal a rendszerrel, amihez képest mozog.



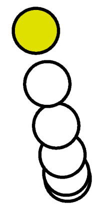


Ha van alkalmad kipróbálni, akkor ülj le egy nagy forgó asztal vagy körhinta közepére. A világ elfordul körülötted, de ne is törődj vele, most csak az asztalra figyelj. Ha egy golyót lassan elgurítasz vagy eldobsz az asztal széle felé, csodálkozva látod, hogy a golyó ívben halad. Ha az asztalon elfordulsz, és másfelé is megpróbálod a gurítást, ott is elhajlik a pálya, pedig a gurítás után a golyó háborítatlanul mozog, a tehetetlenség törvényének érvényesnek kellene lennie rá, mégsem egyenes vonalú a mozgás. Ebből kiderülhet az, hogy a forgó asztalon veled mozgó világ, az a vonatkoztatási rendszer, amelyet te automatikusan létrehozol magad körül, *nem* nevezhető inerciarendszernek. A golyó mozgását valójában irányító Térben és a Föld gravitációs terében a te vonatkoztatási rendszered **forog**. Folyamatosan változik az alapiránya. Ez egy *gyorsuló* vonatkoztatási rendszer.

Ha valaki felülről nézi az egészet, ő azt fogja látni, hogy a golyót elgurítod, aztán te tovább fordulsz az asztallal, eközben viszont a golyó szép egyenes vonalban legurul róla. Szerinte egyenes, szerinted görbe. Akkor viszont a kettőtök nézőpontja, látásmódja, vonatkoztatási rendszere *lényeges* dologban különbözik, vagyis **nem ekvivalensek**, nem egyenértékűek. Azaz ha az egyik rendszerben valami képletekkel meghatározod egy test mozgását, akkor azt nem lehet a másik rendszerben is felhasználni úgy, hogy csak egy-két számot elég megváltoztatni benne.

Mi az inerciarendszer fő kritériuma?

Filmekben van olyan, hogy egy autó belsejét látjuk egy rögzített kamerával, és az autó felborul. Mi, nézők, akik ez esetben kizárólag a szemünkkel érzékeljük ezt a helyzetet, azt látjuk, hogy az autóban levő tárgyak furcsa irányokba kezdenek esni. Amíg a kocsi hempereg, addig a mozgás szabályai szinte nem is követhetőek, a leeső dolgok ívelt pályán haladnak, hol erre, hol arra, szóval a helyzet nem alkalmas arra, hogy egy egyenes vonalban haladó test pályáját meg tudd tippelni. Amikor viszont a kocsi megáll valamilyen helyzetben, onnantól az egyenes ismét egyenes lesz. Csak másfelé. De az elejtett tárgy ezután is egyenes vonalban fog esni, csak az egyenes vonal leírására a fejre állt ember koordinátarendszerében más lesz az egyenes egyenlete. De akkor is egy lineáris függvény marad, csak más irányban. Ezek szerint a fejre állt helyzet szintén inerciarendszer, és egyszerű matematikai transzformációval minden mozgás átszámítható belőle a normális, talpra állt rendszerbe.

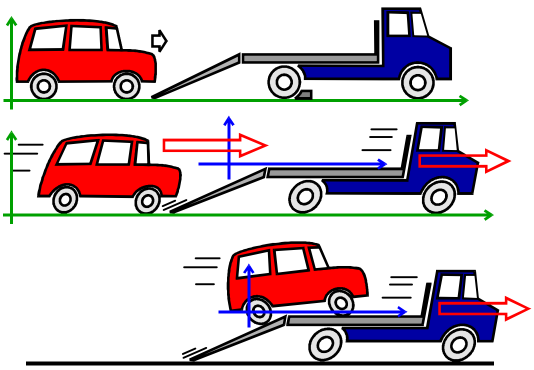


Próbáld ki egyszer, hogy előveszel valami puha tárgyat, egy szivacslabdát, egy zoknit, aztán fejre állsz, és most dobd *fel* a labdádat. A beidegződés miatt lehet, hogy valójában lefelé dobod, ezen elég jókat lehet mulatni, főleg ha te nézed más bénázását. Nehéz eldönteni, hogy ilyenkor merre is van az a "fel". De ebben a rendszerben érvényes marad, hogy ha a labdát elgurítod, akkor egyenes vonalban gurul, az elejtett tárgy pedig valamerre, szintén egyenes vonalban gyorsulni kezd? Érvényes marad. Akkor a fejre állt ember saját vonatkoztatási rendszere is inerciarendszer.

Egy inerciarendszer az elfordítása után is inerciarendszer marad. (Ha már nem forog.)

Ha olvastad a Végjáték című regényt (ha nem, akkor miért nem?), akkor emlékszel arra, hogy a gyerekek mindig bemennek egy hatalmas stratégiai gyakorlóterembe, ahol az ellenfelük kapuja a túlsó falon van. De a teremben tökéletes súlytalanság uralkodik, ezért a tájékozódás kicsit zavaros. A legtöbb gyerek megpróbálja megtartani magában azt a fel–le irányt, ami még a folyosón volt érvényes, ezért egy hozzá képest oldalra vagy fejjel lefelé forduló, lebegő társát "rossz" helyzetben levőnek érzi, és ez meg-nehezíti azt, hogy a terem bármelyik irányában rugalmasan szervezhessenek támadásokat. A főhős, Ender Wiggin ráérez egy sokkal praktikusabb látásmódra, és kimondja azt a később jelszóvá vált mondatot, amely egyszerre helyre teszi mindenki agyában az irányokat: „Az ellenfél kapuja *lent* van." Miután mindenki átrendezte magában a tér irányait, megszüntetve a plafon és oldalfalak közötti különbséget, felszabadították magukban azt a képességet, hogy *kényelmesebben* használhassák az irányok fogalmát és a mozgások megnevezését. De a rendszer inerciarendszer maradt, mert amikor a faltól ellökik magukat, egyenes vonalban lebegnek a másik falig.

Ha fejre állsz, az általad látott rendszerben érvényes a tehetetlenség törvénye?



Van, amikor a mozgás maga követeli a vonatkoztatási rendszerek közötti váltást. Ha megfigyeljük, ahogy egy autó felgurul egy teherautó rámpáján, akkor valószínűleg mindenki úgy fogja látni a dolgokat, hogy a teherautó áll, a személyautó mozog. A vonatkoztatási rendszer a földhöz van rögzítve, a zöld tengelyek erre emlékeztetnek. Ebben a rendszerben az autó sebessége legyen 3 km/h. Rögzíthető egy rendszer a teherautóhoz is, amelynek a sofőrje a saját szemszögéből azt látja, hogy a személyautó 3 km/h sebességgel közelít, majd felgurul a platóra. Az autó szerintünk jobbra mozog, a teherautósofőr szerint pedig felé mozog, de a két megfigyelő saját rendszere csak az alapirányban tér el.

A két autó most eljátssza az akciófilmek egyik mutatványát: felgurulás a rámpán menet közben. A külső megfigyelő azt látja, hogy két elmebeteg száguld egymás mögött, elöl egy teherautó 100-zal, mögötte egy személyautó 103-mal. Ha a teherautósofőr ráérne nézelődni, ő azt látná, hogy a személyautó 3 km/h sebességgel közeledik felé, és felhajtani készül a rámpán. A teherautó saját vonatkoztatási rendszere (kék) 100 km/h sebességgel halad a földhöz rögzített (zöld) vonatkoztatási rendszerben. A mozgás átszámítása zöldből a kék rendszerbe ezért –100, a kékből vissza a zöldbe +100 km/h korrekciót jelent. Vagyis ha egy kétségbeesett pók a platón 2 km/h sebességgel mászik előre a kék rendszer szerint, akkor a zöld rendszerben, a földhöz képest 2+100 km/h a sebessége.

Ha a szél előrefelé fúj 10-zel, mekkora menetszél borzolja a pók frizuráját? 92 km/h.

Nincs a rajzon, de nyugodtan rendelhetünk egy harmadik rendszert a személyautóhoz is. Ebben a rendszerben a teherautó sebessége –3 km/h, a földi megfigyelőé –103 km/h, a póké –1 km/h.

Megjegyzés: A relativitáselmélet azzal aratott sikert, hogy következetes magyarázatot tudott adni a *Michelson–Morley-kísérlet* érthetetlen eredményéhez. Kiderült, hogy a fényre nem érvényes ez a számolgatás. A fény sebessége mindenhez képest ugyanannyi.

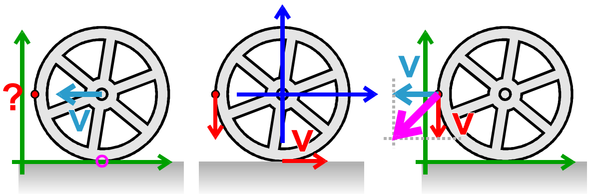
A személyautót vezető akcióhős ha előre néz, azt látja, hogy a teherautóhoz képest 3 km/h-val halad, de ha oldalra néz, azt látja, hogy a fákhoz képest a sebessége 103 km/h. Ahhoz, hogy ezt a sebességet tartsa, nyomni kell a gázt rendesen. Az első kerekek már a rámpán vannak, és elérkezik a pillanat, amikor a kocsi hátsó kereke is eléri a rámpa végét. (Hátsókerék-meghajtású.) A kocsi sebessége elvileg nem változik, az úthoz képest 103 km/h, a teherautó vezetőfülkéjéből nézve továbbra is 3 km/h. De azzal, hogy a kocsi felkapaszkodott a rámpa végére, hirtelen a 3 lett fontos, és elvész a 103 jelentősége. Mert mostantól tökmindegy, hogy a teherautó mennyivel megy, az a lényeg, hogy a kocsi meg tud-e állni a plató végéig. Ha most megkérdezed, hogy a kocsinak mennyi a sebessége, most már mindenki azt fogja mondani, hogy 3 km/h, egyszerűen azért, mert mindenki önkéntelenül is a teherautóhoz kötött vonatkoztatási rendszert veszi alapul, mert most már ez a személyautó környezete.

Ha ez az akciót egy légpárnás hajóval csináljuk végig, akkor ennyivel le is zárhatnánk, így viszont van még egy apró érdekesség. Az autó a forgó kerekével hajtja magát, márpedig a kereke alatt mozgó felülethez képest 103 km/h sebességgel robogott, aztán a felület hozzá viszonyított sebessége ugrásszerűen 3-ra csökkent. De a motor úgy dolgozik, hogy a kocsi 103-mal tudjon menni. Régi vitatéma, hogy a kocsi most megtartja-e a platóhoz viszonyított 3 km/h-s sebességét, vagy a platóhoz képest 103 km/h sebességgel kilő, lekaszálva a vezetőfülkéjét. A motor és a kerék sebességét figyelve az utóbbi lenne az eredmény, de a kocsi képtelen hirtelen 3-ról 103-ra gyorsulni, ehhez a brutális gyorsuláshoz óriási gyorsító erő és motorteljesítmény kellene. Ehelyett a kerék kipörög, mintha lassú gurulás közben a gázba tapostunk volna. Ez ad annyi időt, hogy a fékbe taposva éppen meg lehessen állni a plató végéig.

A teherautó kék vonatkoztatási rendszerében milyen sebességgel mozognak a fák?

Most már belejöttél a vonatkoztatási rendszerek közötti áthelyezkedés trükkjeibe. Mondtam, azért érdemes ez az egészet érteni, mert néha megkönnyíti a dolgunkat a rendszerek közötti váltás. Nézzünk hát egy feladatot, amikor ennek a hasznát látjuk, amikor a segítségünkre van ez a lehetőség.

Az első ábrán egy kerék gurul a földön, **v** sebességgel, *balra*. A kérdőjellel is megjelölt piros pontnak mekkora és éppen milyen irányú a sebessége?



Talán lefelé mozog? Lehet. Mivel a kerék rögtön továbbfordul, nehéz megfigyelni. Hirtelenjében nem is tudjuk, hogyan foghatnánk hozzá.

A kerék középpontja állandó **v** sebességgel balra mozog a földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva, amit a zöld koordinátatengelyekkel jelöltem. De megtehetjük, hogy egy másik vonatkoztatási rendszert rögzítünk a kerék középpontjához. Maga a kék vonatkoztatási rendszer állandó **v** sebességgel balra mozog a zöld rendszerhez viszonyítva, a zöld rendszer*ben*. Azért, mert a kerék középpontjához van rögzítve, ami **v** sebességgel mozog. Ebből az következik, hogy a kék rendszerben történt minden mozgáshoz csak hozzá kell adni egy balra mutató **v** sebességet ahhoz, hogy a zöld rendszerben érvényes értéket kapjunk.

Most akkor feledkezzünk el a kerék haladó mozgásáról! Nézzük úgy, hogy a kék vonatkoztatási rendszerbe képzeljük magunkat, mintha ráültünk volna a kerék tengelyére. Ebben a rendszerben a kerék mozgása nagyon egyszerű, hiszen egyenletesen forog, a középpontja nem mozdul. Ha a kerék tengelyén ülve a kereket nézzük, akkor csak azt látjuk, hogy a kerék forog. Ebben az esetben merre mozog a megjelölt pont? Lefelé. Mekkora sebességgel? Annyival, amennyi a kerék külső pontjainak a kerületi sebessége. És az mennyi?

Ehhez egy pillanatra nézzük meg újra az első ábrát. A guruláskor a lenti megjelölt pont a földhöz képest nem mozdul (hiszen a kerék nem csúszik), a tengely viszont igen, **v** sebességgel balra. Ha a tengelyhez rögzítjük magunkat, akkor pedig a pont a földdel együtt mozog, **v** sebességgel jobbra.

Ismét a második képnél járunk, a kék rendszerben. Az alsó pont **v** sebességgel jobbra mozog, de a kerék merev test, ezért a kerület *minden* pontja **v** sebességgel mozog, pozitív forgásirányban. Ebből az következik, hogy a piros pont lefelé mozgása **v** sebességű, vízszintes irányú mozgása nincs.

Helyes, megkaptuk tehát a piros pont mozgását a kék vonatkoztatási rendszerben. Akkor most térjünk vissza a zöld vonatkoztatási rendszerbe, amely a földhöz van rögzítve, a harmadik ábrán. Megegyeztünk, hogy a kék rendszerből visszaállni a zöld rendszerbe úgy lehet, hogy mindenhez hozzáadunk egy balra mutató **v** sebességet. Van tehát a lefelé mutató piros **v** sebességünk a kék rendszerben. Hozzáadunk egy balra mutató kék **v** sebességet. Kiszámítandó a két sebességvektor eredője, ami azt adja eredményként, hogy a kérdezett sebesség pillanatnyi iránya 45° lefelé, a nagysága $\sqrt{2}\cdot\mathbf{v}$.

Természetesen van más lehetőség is a feladat megoldására, de ez a legsimább. Nem állítom, hogy ez forradalmi újdonságot visz az életedbe. Puszta okoskodással, jó képzelőerővel ugyanígy rájöhettél már a jó eredményre hasonló jellegű feladatoknál magadtól is. Most csak annyi történt, hogy nevet adtunk a fogalmaknak, és jobban kiemeltük a szabályait. Ezután pedig akkor alkalmazod ezt az eszközt, a "ha onnan nézzük, hogy" módszert, amikor majd hasznosnak érzed.

A dinamika alaptörvénye

Newton II. törvénye (a dinamika alaptörvénye) szerint

Egy pontszerű test sebességének megváltozása egyenesen arányos és megegyező irányú a testre ható erővel, és a kettő aránya a tömeg, amely állandó.

A sebesség megváltozása gyorsulás, emlékszel? A törvényből következik az, hogy **a test gyorsításához külső erőre van szükség.** Erő hiányában a test nyugalomban marad, lásd az I. törvényt. Minél nagyobb erőt fejtünk ki a testre, legyőzve a tehetetlenségét, annál nagyobb lesz a gyorsulása. **Kis erő kis gyorsulás, nagy erő nagy gyorsulás.** Szintén igaz az, hogy ha ugyanakkora erővel tolunk egy nagyobb tömegű testet, mint egy kisebbet, akkor **a nagyobb tömegű test nehezebben fog gyorsulni**. Gyakorlati példával érzékeltetve ezt a jelenséget: egy kigyúrt óriást nehezebb hanyatt lökni, mint a kisöcsénket. (És kevésbé érdemes.)

Figyeld meg a törvény érdekes vonását: ha feltesszük a kérdést, hogy „Mi az a tömeg?”, akkor a válasz erre lehet az, hogy "a gyorsító erő és a gyorsulás hányadosa". F/a=m. Ezt az alapelvet a <u>tömeg megmérésére</u> is használják olyan körülmények között, amikor a rugós és karos mérlegek nem használhatók vagy túl pontatlanok. Például súlytalanságban, vagy ha a tömeg nagyon kicsi.

A dinamika alaptörvényének kifejezésére a következő, <u>nagyon fontos</u> képletet használjuk:

$$F = m \cdot a$$

ahol $\mathbf{F}$ a testre gyakorolt erők *<u>eredője</u>*, $\mathbf{m}$ a test tömege, $\mathbf{a}$ az erő által létrehozott gyorsulás. A gyorsulás iránya mindig megegyezik a gyorsító erő irányával. A gyorsítást az $\mathbf{m}$ tömeg tehetetlensége nehezíti, amely az $\mathbf{m}$-mel egyenesen arányos. A tömeg állandó (lásd még az 1. témakör TÖMEG fejezetét).

Ennek nyomán az I. és II. (és IV.) törvényt összefoglalhatjuk az **egyesített mozgástörvénnyel:**

Egy pontszerű test akkor és csak akkor tartja meg mozgásállapotát, nyugalmi helyzetét, ha a rá ható erők vektori eredője nulla, ellenkező esetben a test egyenletesen gyorsul.

Emlékeztetlek arra, hogy a 2. témakör MOZDULATLANSÁG fejezetében még nem beszéltünk mozgásállapotról, hanem akkor még csak álló testről. Most már ezt ki tudtuk terjeszteni egyenes vonalú egyenletes mozgásra is, inerciarendszertől független alaptörvényként.

A törvény fontos felhasználási módja az, hogy **ha a test nyugalmi helyzetben van, akkor ez <u>csak úgy lehetséges</u>, ha *a testre ható* erők kiegyenlítik egymást**. Eszerint ha egy feladat elemzésekor úgy találjuk, hogy ezek az erők nem egyenlítik ki egymást, de a testről tudjuk, hogy nem gyorsul (nem mozdul), akkor *egészen* biztosak lehetünk abban, hogy az erők berajzolásakor kifelejtettünk valamit, vagy egy erőt rossz helyre vagy rossz irányba rajzoltunk. Ez az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző testre is igaz! És arra is oda kell figyelned, hogy ehhez ne vegyél számításba olyan erőt, amely *nem erre a testre* hat.

> Egyes esetekben, például az emelőkről szóló feladatokban nem kell a nyugalmi helyzethez szükséges összes erőt megvizsgálni és berajzolni, mert ott a feladat a forgatónyomatékokra koncentrál.

Teljesen biztosak lehetünk abban is, hogy **ha a testre egy nem nulla eredő erő hat, akkor az a test meg fog mozdulni, méghozzá az erővel és a tömeggel arányos mértékben gyorsulva**.

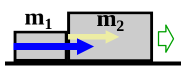
Az is kiderül a képletből, hogy ha egy mozgó testet le akarunk fékezni, akkor a tömeg ismeretében egy adott fékező (a mozgással ellentétes irányú) erőről megmondható, hogy az milyen mértékű lassulást fog okozni, illetve egy adott lassuláshoz – ami a fékútból és a kezdősebességből is megkapható – milyen erőre van szükség.

Hogy szól az egyesített mozgástörvény? Mi szükséges a gyorsuláshoz?

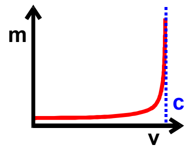
A számos nagy gyakorlati jelentőségű értelmezés között van egy kiemelten fontos: ha egy testre valamilyen erőt fejtünk ki, akkor a tapasztalt gyorsulásból és a test tömegéből kiszámítható, hogy az erő mekkora. Az SI mértékegységrendszerben az erő mértékegysége, **a newton (N) definíciója is a tömegre és a gyorsulásra van visszavezetve**, ezért van az, hogy ahogy az ERŐ fejezetében láttuk,

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

vesd össze a dinamika alaptörvényével. Tehát: **1 newton az az erő, amelyik 1 kg tömegű testen 1 m/s^2 gyorsulást hoz létre.** Ezt az elvet követve egy test tömege *súlytalanságban*, így a Föld körül keringő űrhajóban is megmérhetővé válik. A SÚLY fejezetben még lesz erről szó.

> Mutatok egy érdekes feladatot. **Az asztalon két test van, amelyek egymáshoz érnek, a tömegük m1=2 kg, m2=6 kg. Az ábra szerint kifejtünk m1-re egy állandó F=40 N erőt. Súrlódás nincs,** ezt nyilván akkor is érted, ha a súrlódási erőt még nem beszéltük meg: ha megtolod a testet, az asztalon az minden akadály nélkül csúszik. **A kérdés: mekkora erő hat az m2 testre?**
>
> 
>
>
> Kicsit nehéz feladat, mélyen el kell gondolkozni azon, hogy mi mennyire nyom mit. De ha másképp fogjuk meg a problémát, hirtelen nagyon könnyűvé válik. A két egymáshoz nyomódó test olyan szempontból egyetlen testnek tekinthető, hogy az F hatására együtt elkezdenek jobbra gyorsulni, a törvény kötelez, a dinamika alaptörvényéből következően $a=F/(m_1+m_2)$ gyorsulással, 40/8=5 m/s^2, sima ügy.

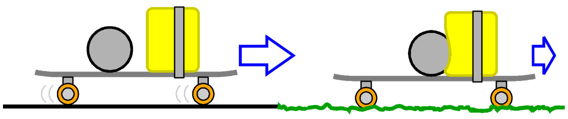
Most jön a két test közötti erő. Halványan berajzoltam, hogy a bal oldali test nyomja a jobb oldalit, mert *ha nem tenné*, a jobb oldali test nem mozdulna el, az pedig nyilvánvalóan lehetetlenség. Nézd meg a könyv elején a mottót: „tanuld meg a törvényt és ragaszkodj hozzá". Az m_2 le sem maradhat, és arra sincs oka, hogy elhagyja az m_1-et, igaz? Akkor az ő gyorsulása is csak 5 m/s^2 lehet. A tömege m_2=6 kg, mi következik ebből? *A gyorsító erőnek 30 N-nak kell lennie, mert csakis ez teljesíti a törvényt.* Hát akkor a válasz 30 N, akkor is, ha az erőkkel nem tudjuk a dolgot kapásból meg-magyarázni. Kész. Ragaszkodtunk a dinamika alaptörvényéhez, és az segített nekünk.



Érdekesség: A relativitáselmélet egyik fontos kijelentése szerint a test tehetetlensége valójában *nem állandó*. Ha a tömeg mozog, akkor ha nő a sebessége, nő a tehetetlensége is. Ez a változás még az űrhajóink sebességtartományában (9-10 km/s) is alig mutatható ki, vagyis a hétköznapi világban a tehetetlenséget vehetjük a tömeggel egyenes arányosnak, és kész. De közeledve a fény sebességéhez (300 ezer km/s) a *nyugalmi tömeg* és a *tehetetlen tömeg* közötti eltérés gyorsan nő. A test anyaga nem lesz több, de a tehetetlensége, az F/a arány igen. A dinamika alaptörvénye értelmében ezért a gyorsításhoz egyre több erő kell. Végül a fénysebességre (c) gyorsuló test tehetetlen tömege eléri a végtelen nagyságot, így aztán a további gyorsításához a végtelennél több erő kellene. Mivel ez nem lehetséges, ezért a fénysebességnél nagyobb sebesség elvileg elérhetetlen. Az elméletet a megfigyelések eddig alátámasztották.

Tehetetlenségi erő

Újra egy elméleti téma, és nem baj, ha nem érted meg *teljesen*. Azért próbálkozz meg vele.



Egy gördeszkára kötözöl egy szivacsot, mögé teszel egy nagy vasgolyót, és az egészet ügyesen, együtt meglököd. A tükörsima járdán – hanyagoljunk el minden zavaró tényezőt – ez a rendszer egyenletes sebességgel mozog, nem történik vele semmi érdekes. De aztán a deszka rámegy a fűre, és fokozatosan, de gyors ütemben lelassul, majd megáll. Eközben azt látod, hogy a golyó a tehetetlenségi erőnek engedelmeskedve előremozdul, és benyomódik a szivacsba, majd végül az egész rendszer elnyugszik.

Nyilván nem stimmel valami, egyébként nem magyaráznám ennyire. A tehetetlenségi erő nem stimmel. Ha mi lennénk a golyó helyében, azt éreznénk, hogy a tehetetlenségi erő előrenyom bennünket. Egy fékező autóban ezt érezzük. Ugyanilyen erő nyom hátra bennünket, ha az autóval gyorsítunk, ugyanilyen erő szorít az autó oldalához, ha kanyarodunk. A testünk sebességét az ülés támlája vagy az autó oldala változtatja, és bennünket a tehetetlenségi erő nyom hozzá.

Csakhogy ez nem igaz. Ha igazán pontosan nézzük a dolgokat:

A bennünket nyomó tehetetlenségi erő *nem létezik*.

Nincs ilyen erő. Félremagyarázunk dolgokat, tévhitben vagyunk. **Erőt csak másik test hozhat létre**, és nincs ott semmilyen test, amely a lassuló gördeszkán a golyót előrenyomná. A fékező autóban mi sem egy erő miatt nyomódunk előre. Az a *hatás*, jelenség, ami előrenyom bennünket, **maga a tehetetlenség**, a tehetetlen tömeg létezésének, megjelenésének egyetlen lehetséges formája. Csak mi *úgy érezzük*, mintha erő lenne. Itt csak egyetlen erő működik, miután a golyó elérte a szivacsot, az, amivel a szivacs a golyó mozgását megállítja.

A golyót nem egy erő nyomja előre, mindössze szeretné betartani Newton I. törvényét, szeretné megtartani egyenletes sebességét, és hagyják őt békén. Kezdetben egyenletes sebességgel haladt, és szívesen tenné ezt továbbra is. Ezért amikor a deszka lefékeződik (fizikai szempontból "**gyorsul**", tudod, mert változik a sebessége), a golyó megy előre, ahogy a tehetetlenség törvénye előírja. Egy inerciarendszerben ez így működik, márpedig a mi földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerünk az.

A szivacshoz nyomódó golyóra hat a szivacs nyomóereje, hátrafelé. Ha lenne a golyóra ható tehetetlenségi erő is, előrefelé, akkor a két erő "kioltaná egymást", *az eredőjük nulla lenne*, és a sebességének nem lenne szabad változnia, igaz? Pedig a golyó végül megáll. Ha lenne tehetetlenségi erő, az megszegné az egyesített mozgástörvényt, tehát ilyen erő nincs, nem lehet. **Csak tehetetlenség van.**

Ha oldalról egy kis kocsiról videóznánk az egészet, úgy, hogy a kamera a golyó sebességével egyenletesen halad, akkor a videón a golyó mozdulatlan lenne. Már beszéltünk ilyenről az INERCIARENDSZER fejezetben. Azután látnánk, hogy hirtelen *a szivacs nekimegy a golyónak*, és magával sodorja. Hülyén hangzik, de ebben a rendszerben tényleg a szivacs mozog, méghozzá gyorsulva, végül felgyorsítva a golyót is. *Hátra*. A golyóra így nézve sem hatott előre mozgató erő.

Mi, akik a földön állva az egészet nézzük, egy inerciarendszerben állunk. A világot, a körülöttünk levő mozgásokat többnyire úgy *célszerű* leírni, ahogy ebben az inerciarendszerben zajlanak. Azért fontos ez, mert annak a törvényeit már ismered, ez a "rendes" vonatkoztatási rendszer, és ha tartod magad hozzájuk, nem fogsz eltévedni, nem fognak semmiből támadó erők kerülni az egyenleteidbe.

A golyó kezdeti mozgását melyik törvény határozza meg?

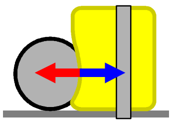
> Lehet nézni másképp is, persze. Rögzíthető az a kamera és az a vonatkoztatási rendszer a gördeszkához is, ami le fog lassulni a füvön, ne felejtsd. A videón ekkor azt látod, hogy a golyó egyszer csak minden látható ok nélkül gyorsulni kezd, előrefelé. Mint egy autó-töréstesztről készült videón, ahol a bábuk hirtelen előrevetődnek az ülésről, pedig nem ők ugranak fel, hanem az autó lassul le körülöttük a bekövetkezett ütközéstől.
>
> Ebben a nézetben a tehetetlenség törvénye nem érvényes, a nyugalomban levő testek mozgása nem marad egyenletes, ezért ez a füvön lelassuló vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer. De ebben a rendszerben *valóban* a golyó indul meg és megy neki a szivacsnak, és **ebben a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben valóban van egy olyan erő**, amely a golyót *külső hatás nélkül* gyorsítja, ilyenkor ezt hívják tehetetlenségi erőnek.

Amikor egy feladat áttekintésekor, a helyzet modellezésekor megérteni próbálod a testek egymáshoz viszonyított mozgását, néha kényelmesebbnek fogod érezni, hogy egy változó sebességű vonatkoztatási rendszerből figyeld a dolgokat. Mint amikor ülsz a buszon, az lefékez, és *a buszhoz képest* te előrelendülsz. Olyankor te a buszhoz kötött vonatkoztatási rendszerben fogod látni magadat, és ekkor, de csak ekkor, megengedhető, hogy azt állítsd, hogy téged a tehetetlenségi erő lökött előre. Ha viszont te kívülről látod, ahogy egy fékező buszban az utasok előrelódulnak, akkor csak *hasonlatként* beszélhetsz tehetetlenségi erőről. És ez utóbbi a "rendes" eset.

A test képzelt tehetetlenségi erejével a számításokban *jelképezhetjük* a test tehetetlenségét.

Ha feltételezünk egy tehetetlenségi erőt, akkor azt úgy vehetjük, hogy a testre annak **tömegközéppontjában** hat. Így tettünk a 2. témakörben is az egyensúlyról szóló fejezetekben.

A gördeszka vonatkoztatási rendszere milyen mozgást végez a mi inerciarendszerünkhöz képest?



Tudjuk, hogy *valamilyen* erőnek kell itt lennie, mert a szivacs mégiscsak benyomódik valamitől. Az lehet a kérdés, hogy melyik az aktív erő és melyik az ellenerő. Csak azért lehet ez érdekes, mert az ellenerő igazodik az aktív erőhöz, vagyis a nagyságukat az aktív erő határozza meg. Nos, ha a földi, az "igazi" inerciarendszerben a golyó van nyugalomban (Newton I. törvénye), és a szivacs megy neki, akkor a szivacs hozza létre az erőt (piros), ami a golyó mozgásállapotának megváltoztatásához szükséges (Newton II. törvénye), és a golyó a tehetetlenségének következtében ennek ellenáll, és ellenerőt (kék) gyakorol a szivacsra. **Ez az inerciarendszerhez illő leírása az eseménynek**, ezen az úton haladva fognak jól kijönni az egyenletek, ez a profi nézőpont. Az, hogy a szivacs miért indul meg hátrafelé, az mellékes, egyébként azért, mert a gördeszka, amihez rögzítve van, a füvön lassulni kezd, és a dinamika alaptörvénye alapján erre is elvégezhetők a számítások.

A tehetetlenségi erő kifejezést használhatjuk egy *valódi* erőre, ha akarjuk. Rákötünk egy madzagot egy téglára, és jó erősen megrántjuk. Azt várjuk, hogy a tégla gyorsulni kezd a rántás irányába. Lehet, hogy úgy is fog történni. De ha elég erősen rántjuk, akkor a madzag elszakad. Mi tépte el? Hát mi magunk, a mi erőnk. De milyen *erő* hatott a madzagra a másik irányban? Mert valaminek húzni kellett a madzagot abba az irányba is. A tégla tehetetlensége volt az, ez a jó válasz. Ellenállt a gyorsító erőnek, nem engedelmeskedett neki elég gyorsan, elég könnyen. A sebességváltozáshoz elég ideig tartó elég erő kell. A számításokban erőkkel és sebességekkel dolgozunk, ezért mondhatjuk azt, hogy a másik erő a tégla tehetetlenségi *ereje*. A szivacsot a golyó tehetetlenségi ereje nyomta be. A gyorsító erő ellenereje, ami az ábrán a kék nyíl. (Jelölhetjük $\mathbf{F}_T$-vel.) Ami **a golyó *tehetetlenségéből ered*.**

Tehetetlenségi erőnek hívhatjuk azt az erőt, amelyet a tehetetlen test fejt ki az őt sebességváltozásra kényszerítő testre.

Látod a különbséget? A golyó**ra** nem hat tehetetlenségi erő, csak úgy érzi. De a tehetetlensége következtében **a golyó hat egy erővel arra**, ami a sebességét változtatja, a szivacsra. A téglára nem hat tehetetlenségi erő, de a tégla a tehetetlenségi erejével szakítja el a madzagot. Fékezéskor a te tehetetlenségi erőd feszíti meg a biztonsági övet. Vigyázz, hogy ha használod a szót, akkor jól használd.

Szabadesés, nehézségi gyorsulás

A 2. témakörben már olvashattad a **nehézségi erő** meghatározását. Azt az erőt hívjuk így, amellyel a Föld (vagy más égitest) gravitációs ereje a testet vonzza. A jele $\mathbf{G}$.

Amikor egy testre csak a saját nehézségi ereje hat, akkor ennek az erőnek a hatására zuhanni kezd, egyenletesen gyorsul, az őt vonzó tömeg (tömegközéppontja) felé. Ezt az állapotot hívjuk **szabadesés**nek. Alapesetben ilyenkor a test mozgását az egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgásra vonatkozó képletekkel írhatjuk le. (Általános esetben pedig a pálya mindig egy parabola része.)

Szabadesés az a mozgás, amikor a testre csak az égitestek tömegvonzási erői hatnak.

Földi körülmények között a szabadesést nehéz megvalósítani, mert a légellenállás (lásd később) a szabadesést fékezi, emiatt a testre már nem csak a saját nehézségi ereje hat. Ebből az következik, hogy nagy légellenállású testek, mint egy papírlap, falevél a normál környezetben lassabban esnek, de *csak a levegő fékező ereje miatt*. Az Apollo 15 űrhajósa, David Scott elvégzett a Hold felszínén egy szabadeséses kísérletet: egyszerre leejtett egy kalapácsot és egy külön ezért odavitt madártollat. A légüres tér miatt a tollat sem akadályozta semmi, és a két tárgy egyszerre ért talajt, a YouTube-on meg tudod találni ezt az érdekes videót.

A legenda szerint Galilei a pisai ferde toronyból egyforma méretű, de más anyagból készült, más tömegű golyókat ejtett le, amelyek egyszerre értek földet, bizonyítva, hogy a légellenállás különbségét kiküszöbölve az eltérés eltűnik. A történészek szerint a legenda nem igaz, inkább csak gondolatkísérlet lehetett, de a kísérlet valóban ezt az eredményt hozta volna. (Erre azért még visszatérünk.)

Azért, mert ha felírjuk a dinamika alaptörvényét, a Föld gravitációs erejének behelyettesítésével:

$$f \cdot \frac{m_F \cdot m_T}{r^2} = m_T \cdot a$$

észrevehető, hogy a test tömege (m_T) egyszerűsítéssel *eltűnik az egyenletből*. A következtetés: **a szabadesés gyorsulása nem függ a test tömegétől.**

A szabadeséskor megfigyelhető gyorsulás neve **nehézségi gyorsulás**, mert a test a saját nehézségi ereje hatására gyorsul. A jele $\mathbf{g}$.

A nehézségi erő forrása a Föld gravitációja, és így függ a Föld tömegközéppontjától való távolságtól (r), tehát annak a helynek a magasságától, ahol a szabadesés történik. A Föld tömege (m_F) és a gravitációs együttható (f) állandó, tehát ***azonos magasságon*** **(állandó r-nél) a nehézségi gyorsulás mindenhol és minden testre ugyanaz**. A mérések alapján megállapított szabvány szerint tengerszinten

$$g = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}.$$

> Megjegyzés: Ebbe a szabványértékbe már Föld forgásának módosító hatása is bele van kalkulálva, és a $\mathbf{g}$ ezért a 45. szélességi fokra vonatkozik, de a különbség nem sok.

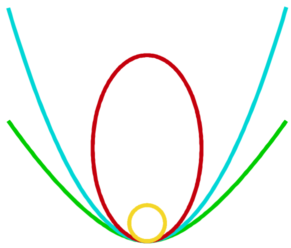
Ha a szabadesést magasabb helyen figyeljük meg, akkor a Föld és a test valamivel nagyobb távolsága miatt a gravitációs erő és a nehézségi gyorsulás kicsit kisebb, a magashegységekben 1-2 ezreléknyivel. Ezt a számításokban el szoktuk hanyagolni, a test nehézségi erejét állandónak tekintjük, ezért megengedett az egyenletes gyorsulás képleteinek használata. Ennek ellenére jegyezd meg, hogy **a nehézségi gyorsulás pontos értéke csak az adott helyre (és magasságra) érvényes**. A feladatokban általában megengedett, hogy a $\mathbf{g}$ értékeként 10 $\mathrm{m/s^2}$-et használj.

A nehézségi gyorsulás az, ami létrehozza a test súlyát.

Kérdés: egy golyót ágyúval kilövünk a Föld irányába, szabadesés-e a golyó mozgása? Igen, mert a golyóra csak a Föld tömegvonzása hat, és az nem számít, hogy a test sebessége vagy kezdősebessége mennyi. Ha a kezdősebesség nagyon nagy, akkor a levegő lefékezi a testet. Mi?? Levegő fékezi? Akkor *nem* szabadesés, mert már nem csak a tömegvonzás ereje hat a golyóra, hanem egy másik erő is, ez esetben a légellenállás. Ha az ágyúgolyót a világűrből lőjük ki, ott még szabadesés.

És szabadesés-e az, ha a golyót a világűr légüres terében nem pont a Föld felé lőjük ki, hanem félig-meddig oldalra, vagy esetleg felfelé? Igen, mert a Föld tömegvonzásán kívül nem hat rá más erő, és csak ennyi a lényeg. És ha úgy lőjük ki, hogy körpályára áll a Föld körül? Az is szabadesés, ugyanazért. Akkor ha egy űrhajó a hajtóművével a Föld körüli pályára áll, az szabadesés? Nem, mert a gravitáción kívül hat rá a működő hajtómű által kifejtett tolóerő. A *kikapcsolt* hajtóművel keringő űrhajók viszont már mindig szabadesésben haladnak, pontosan ezért és nem másért van bennük súlytalanság.

Azokat a kozmikus méretű mozgáspályákat, amikor a testre csak a környező égitestek tömegvonzási ereje hat, **tehetetlenségi pályák**nak nevezik. Ezeken a test szabadesésben és súlytalanságban van. Ha egy egyenes kúpot egy sík felülettel bármilyen irányban kettévágunk, akkor a vágási felület négy görbe-típus valamelyike lesz: kör, ellipszis, parabola, hiperbola. Minden tehetetlenségi pálya ezek egyikének egy szakasza, ezért ezeket a pályákat **kúpszelet-pályák**nak is hívják. Az űrhajók a hajtóművükkel mindig csak a végtelen sok tehetetlenségi pálya egyikéről térnek át egy másikra.



Súly, súlytalanság

A súly az a jelenség, ahogy egy test a Föld vonzásából eredő nehézségi erő hatására leesni *próbál*. Ha a testet alátámasztjuk, akkor a szabadesésben megakadályozzuk, ezért az alátámasztásra nyomóerőt fejt ki. **Ez a nyomóerő a súlyerő.** Vagyis **a súly *az alátámasztás miatt* jön létre.** (Ugyanígy érvényesek a továbbiak alátámasztás helyett felfüggesztésre is, legfeljebb az erő támadáspontja van máshol a testen.) Nézhetjük úgy is a dolgot, hogy van a test és van a Föld, amelyek egymást vonzzák, és egymás felé (!) akarnak mozogni. Mi pedig közéjük teszünk egy mérleget, tulajdonképpen egy rugót. Az összenyomódó rugó mutatja azt az erőt, amennyivel a test és a Föld vonzzák egymást. Végső soron ez az erő a test súlya, ami a test tömegével egyenesen arányos.

A dinamika alaptörvénye tisztázza, hogy **ha egy testre összesen egy erő hat, akkor az a test gyorsul**. Ha ez az egy erő a nehézségi erő, akkor a test gyorsulása a helyi nehézségi gyorsulás, ami megmérhető. Ha pedig a gyorsulást és a tömeget ismerjük, akkor megkapjuk az erőt, F=m·a. **A nehézségi gyorsulás és a tömeg szorzata megadja a testre ható nehézségi erőt.**

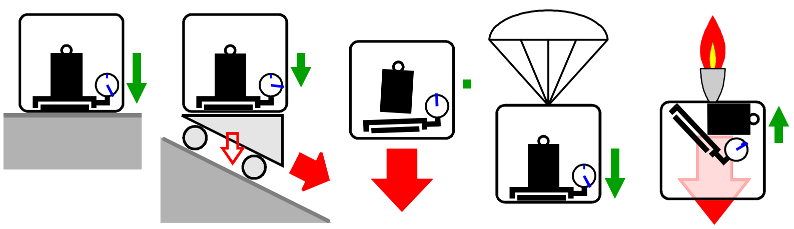
$$G = m \cdot g$$

ahol **m** a test tömege, **g** a nehézségi gyorsulás. Ahhoz, hogy a test ne essen le, nekünk egy ezzel ellentétes irányú, azonos nagyságú erővel kell tartani. Ezt az erőt az alátámasztás, a mérleg fejti ki rá, és a kijelző mutatja, hogy mekkora is az a rugóerő, ami az egyensúlyt megvalósítja.

Az az erő, amivel a test a nehézségi ereje hatására az alátámasztást nyomja, a test súlyereje.

Most tegyük be a testet és a mérleget egy dobozba. Ha ezt a dobozt egy lejtőre tett kocsin legurítjuk, akkor az a lejtő irányában egyenletesen gyorsul. Azért, mert az egész szerkezetre ható nehézségi erő és a lejtő kényszerereje együtt egy ilyen irányú eredőt hoz létre, ezt már többször láttuk. A rendszerünk gyorsuló mozgásba kezd. Lassabban, mint a szabadesés, de mégiscsak egyenletes gyorsulás. Egy nyugalomban levő test szabadon esni próbál. Mi most *egy kicsit* hagyjuk esni. Szeretne még gyorsabban esni, de a mérleg és a kocsi még visszatartja valamennyire. De a mérlegnek már csak a különbözettel kell a testet tartania, már csak a hiányzó gyorsulásból származó erő nyomja. Akkor viszont ez azt jelenti, hogy a test súlya csökken, mert kisebb az a gyorsulás, amivel *a mérleghez viszonyítva* esni próbál.

Ezt a dolgot te magad is megfigyelted már, amikor a hullámvasúton egy meredek lejtőn zúgtál lefelé. Amikor ez a zuhanás kialakult, jött a csiklandós érzés, annak a jeléül, hogy a belső szerveid kevésbé nyomódnak egymásra, a vér is könnyebben áramlik felfelé, mint máskor. Mindennek *csökkent* a súlya.



A súly kiszámítására ilyenkor használható képlet a következő:

$$F_G = m \cdot (g - a_f)$$

ahol $\mathbf{F}_G$ a test súlyereje, **m** a tömege, **g** a helyi nehézségi gyorsulás, és $\mathbf{a}_f$ a test *függőleges* gyorsulása.

Vegyük ki a lejtőt is a doboz alól, hadd essen szabadon. Tegyük fel, hogy valahogy sikerül kiküszöbölnünk a légellenállást, akkor a doboz, a test és a mérleg is egyforma gyorsulással fog esni. Azonos pályán, mindig egymással azonos sebességgel haladnak, így egyik sem gyakorol erőt a másikra. A test nem nyomja a mérleget? Akkor bizony a súly megszűnt, és a *rendszeren belül* **súlytalanság** jön létre. *Nem tűnt el a testek **nehézségi ereje***, nem tűnt el a gravitáció, de a test és a mérleg egymás alatt lebeg, nem nyomják egymást. Addig, amíg el nem érik a földet, ami megállítja őket, és újra létrehozza a súlyukat. **A súlytalanság szabadesés alatt jön létre.** Mi, akik ezt kívülről megfigyeljük, nem vagyunk közben szabadesésben, ezért ránk nem érvényesül a súlytalanság, az csak a két tárgy között létrejött kölcsönös erőmentesség. *A súly relatív (viszonylagos) jelenség.* Az $\mathbf{a}_\mathrm{f}$ értéke egyenlő lett a $\mathbf{g}$-vel, így $\mathbf{F}_\mathrm{G}=0$. Ugyanakkor még mindig $\mathbf{G}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{g}$, a nehézségi erő nem változott.

Ha bezárkózunk egy dobozba a testtel és az alá tett mérleggel, majd a dobozt nagy magasságból leejtik, akkor azt fogjuk megfigyelni, hogy a mérleg és a test is lebegni kezd, és mi is lebegünk dobozhoz képest, nem nehezedünk rá. Ez esetben a szabadon eső rendszernek mi is része vagyunk, a súlytalanság ránk is érvényesül. A dobozból nem látunk ki, ezért a zuhanást nem *látjuk*, hanem csak azt vesszük észre, hogy lebegni kezdünk a tárgyakkal együtt.

Mennyi a nehézségi gyorsulás megszokott értéke? A tömeggel összeszorozva mit kapunk?

Amikor az ejtőernyő egyenletesre fékezi a sebességünket, visszaáll a megszokott **nehézkedés**, mindennek ismét egyforma irányba mutató súlya lesz. Ugyanannyi, mintha a doboz a földön állna, mert most is igaz, hogy az egymáshoz képest egyenletesen mozgó inerciarendszerekben a jelenségek ugyanúgy zajlanak le.

Nyugalomban levő rendszeren belül a súlyerő azonos a nehézségi erővel. A súlyerő függ a test mozgásától, a nehézségi erő nem.

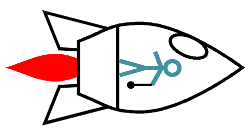
És ha nem csak szabadon esik a doboz, hanem egy rakétával még gyorsítjuk is lefelé? Az eddigieket végigvezetve logikus a válasz: felfelé lesz lefelé, a tárgyak a plafonra esnek, a súly iránya felfelé mutat. A nagysága attól függ, hogy a rakéta milyen gyorsulást hoz létre, a szabadeséshez képest. Ha a képletbe az $\mathbf{a}_\mathrm{f}$ helyére $\mathbf{g}$-nél nagyobb számot helyettesítesz, negatív súlyt kapsz.

A tömegvonzás, a nehézségi erő, a tehetetlenség a test összes pontjára egyszerre, "belül" hat. Ezeket csak az egyszerűség kedvéért vesszük úgy a számításainkban, hogy a test tömegközéppontjában hatnak. **A súlyerő egy kívülről ható nyomóerő miatt jön létre, és a test pontjai ezt az erőt egymásnak adják tovább.** Egy gyurmagolyó az asztalra letéve a feltámasztó erőtől belapul.

> Megjegyzés: Földi körülmények között a kísérlet megvalósítását akadályozza, hogy a doboz zuhanását hátráltatja a légellenállása, ami viszont ránk a dobozban nem hat, emiatt a doboz gyorsulása valamivel kisebb, így mi a tárgyakkal együtt kicsit a doboz aljára fogunk nehezedni, lesz valamennyi súlyunk. Az űrhajósok kiképzése során rendszeresen használnak egy repülőgépet, amelyet a pilótája olyan pályára irányít, mint amit a szabadon eső test a levegő akadályozása nélkül tenne meg, emiatt kb. negyven másodperc idejére az utastérben súlytalanság lép fel, és lehetőséget ad a helyzet megismerésére, a műveletek gyakorlására.
>
> A súlytalanságot szimulálni szokták vízzel telt medencében való *lebegéssel*, azért, hogy az űrhajósok begyakorolhassák a lebegő helyzetben végzendő munkát. De ez nem igazi súlytalanság, mert a testüket a víz felhajtóereje tartja vissza a szabadeséstől, lényegében alátámasztást hozva létre. A belső szerveik továbbra is lefelé törekednek, a vérkeringésük a megszokott, míg valódi súlytalanságban ezeknek is megszűnik a súlya. A súlytalanság ehelyett a vízben lebegés helyett az a kicsit felkavaró érzés, amit olyan vidámparki játékon érzünk egy másodpercre, amit magasból ejtenek le. A súlytalanság tartós *elviselését* az űrhajósok hosszú tréningen tanulják meg.

***A súlytalanság nem a világűrhöz kötődik*, hiszen a súly nem a levegő miatt keletkezik.** A világűrben a *tehetetlenségi pályán*, például a Föld körül haladó űrhajóban van súlytalanság, de ha az űrhajót megállítanánk a pályáján, akkor a *nehézségi erőnek* engedelmeskedve lezuhanna, bizonyítva, hogy az

egyáltalán nem tűnt el. A Föld tömegvonzása semmilyen távolságban sem csökken pontosan 0-ra. A Holdon nincs levegő, de van súly, az űrhajóban van levegő, és fellövéskor van súly, a keringési pályán már nincs súly. A repülő bringás körül van levegő és nincs súly, és ha elengedi a kormányt, a bringa akkor is ott repül vele együtt, mert súlytalanságban vannak.



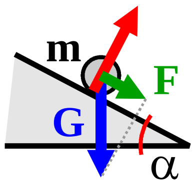
> Megjegyzés: A mozifilmekben mindig azt látjuk, hogy az űrhajókon a szereplők a megszokott módon járkálnak, súlyuk van. Ez a valóságban csak úgy lenne megoldható, hogy folyamatosan működne a hajtómű, gyorsító erőt kifejtve az űrhajóra. Ekkor az emberek a tehetetlenségük miatt a hajtómű felőli oldalra nehezednének, egy *álgravitáció* hatását észlelve. A megszokott súlyhoz szükséges

egyenletes gyorsulás értelemszerűen 10 m/s² lenne, 1 g. De a valóságban az űrhajók csak néhány percre elegendő üzemanyagot tudnak magukkal vinni, és az út nagy részén a hajtóműveket kikapcsolva tartják, az űrhajósok pedig lebegnek. A mesterséges gravitáció feltalálására egyelőre még reményünk sincs.

Mozifilmekben látjuk azt is, hogy amikor az űrhajós súlytalanságban van, akkor szééépen laaassan mozog, hogy lássuk, hogy ő most súlytalan. Ez csak egy régi filmes hagyomány. Valódi felvételeken sokszor láthattad már, hogy az űrhajósok a súlytalanságban is teljesen normálisan mozognak, mert nem az idő lassult le vagy valami hasonló, mindössze a tárgyak nem esnek le. Ha valamit meglöknek, az elrepül, ezért néha *óvatosabban* mozognak, de nem úgy, mint egy zombi.

A 3 g gyorsulású űrhajón mennyi a súlya 40 kilogrammnak?

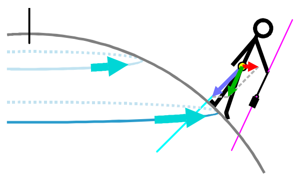
Lejtő (újra)



A lejtővel egyszer már foglalkoztunk, mint testek megemeléséhez használt egyszerű géppel, lásd 2. témakör LEJTŐ fejezetét. A lejtő ismert tulajdonsága az is, hogy ha valamit elengedünk, akkor a lejtőn az legurul vagy lecsúszik. Ez azért történik így, mert a testre hat a saját nehézségi ereje és a lejtő által kifejtett alátámasztási kényszererő, de a kettő egymással szöget zár be, és egy nem nulla nagyságú eredő erőt hoznak létre. Az **eredő erő**, ahogy láthatod, a lejtő vonalával párhuzamos, és a testet ez gyorsítja. Bejelöltem neked a derékszögű háromszög harmadik oldalát. $F = m \cdot g \cdot \sin\alpha$, ahol $\mathbf{F}$ a gyorsító erő, $\mathbf{m}$ a test tömege, $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás, $\mathbf{G}$ a kettőből kiszámítható nehézségi erő, $\boldsymbol{\alpha}$ a lejtő szöge. *Ellenőrizd!*

Látszik a képletből, hogy az $\mathbf{F}$ eredő erő a lejtő meredekségével együtt (szinuszosan) csökken. α=0 esetben a test nem mozdul. Galilei a lejtőt használta a szabadesés "lelassításához", a gyorsuló mozgás megfigyeléséhez, mert a leguruló golyó "kicsit szabadesésben van", és méréseket lehet rajta végezni.

Függőleges



Komolytalan dolognak tűnhet azzal foglalkozni, hogy merre mutat a függőleges irány. Hát lefelé. Igen, de merre van a lefelé? A Föld középpontja felé, nem? Nos, valóban, ez a **geometriai függőleges** iránya. A Föld alakja kicsit szabálytalan, de a középpontja azért nagyjából középen van.

De a Föld belseje sem tökéletesen szimmetrikus, ezért a *tömeg*középpontja nem pontosan a mértani középpontjában van. Ráadásul a Föld felszínén haladva különféle sűrűségű anyagrétegek fölött megyünk el, amelyeknek a tömegvonzása nem egészen egyforma. Ha egy gránithegy és egy tó között állunk, akkor a hegy nagyobb sűrűsége egy kis oldalirányú tömegvonzást is okoz. Eötvös Loránd az érzékeny torziós ingával ezt az egyenetlen tömegvonzást tette mérhetővé, amit aztán a geológiában és a föld alatti lelőhelyek kutatásában hasznosíthattak.

Szóval ha a Föld *tömeg*középpontjába húzzuk a vonalat, korrigálva a helyi gravitációs elhajlással, akkor ezzel megadtuk a **helyi gravitációs függőleges** irányát. Helyi, hiszen a tömegvonzás oldalirányú ingadozása mindenhol más.

A tankönyvekben a forgó mozgásokról szóló lecke végén mindig van egy feladat, amely felhívja a figyelmünket a Föld *forgása* által okozott hatásra is, ami a *szabadesés* által követett függőleges irányt eltéríti a gravitációs függőlegestől. Így igaz, a Föld forog, majdnem 24 óra alatt megtéve egy kört a tengelye körül. A földön álló ember szintén megteszi ezt a kört a Föld tengelye körül, mintha csak körhintán ülne. A CENTRIFUGÁLIS ERŐ fejezetben majd olvashatod részletesebben is, hogy a tehetetlenség a kör középpontjából kifelé ható erő érzetét kelti. A fenti ábrán (nagyíts rá) látod, hogy az ember tömegközéppontjára hat a Föld tömegvonzási ereje (kék), és hat ez a kifelé ható *centrifugális* erő is (piros), amit erősen eltúlozva rajzoltam be. A nehézkedés, a súly irányát *a kettő eredője* hozza létre, a zöld nyíl által jelzett "ferde" irányban. A függőón zsinege ezt az irányt követi, és a hozzánk viszonyítva álló helyzetből elengedett test is ebbe az irányba esik. Függőleges iránynak általánosságban ezt szokás tekinteni. Talán mondjuk úgy, hogy ez a **földi függőleges**.

A kifelé térítő erő a körpálya sugarától függ, ezért a szabvány nehézségi gyorsulás értékét nemcsak a tengerszint magasságához, hanem a 45. szélességi fokhoz is kötik, a 9,80665 m/s² ezen a szélességi körön érvényes. Itt a függőleges irány a helyi gravitációs függőlegestől kb. 0,3° elhajlást mutat az Egyenlítő felé, ami a hétköznapi életben teljesen jelentéktelen mértékű.

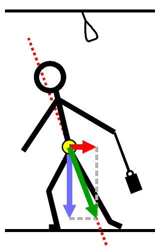
A körmozgás során kifelé húzó tehetetlenséget akkor vehetjük erőnek, ha a vonatkoztatási rendszer a körben mozgó testhez, ez esetben a földön álló emberkéhez van rögzítve. Hozzánk. Ez a vonatkoztatási rendszer elfordul, az alapirányokat kitűző tengelyek iránya folyamatosan változik, vagyis: a rendszer *gyorsul*. Képzeljük el, hogy van egy asztalunk, amelynek a lapja hajszálpontosan a helyi gravitációs függőlegesre merőlegesen van beállítva. Vagyis vízszintesen. Ha letennénk rá egy golyót, és ki tudnánk kapcsolni a súrlódást, mindent, akkor a golyó nagyon lassan gurulni kezdene dél felé. A tehetetlenség törvénye nem működik! A nyugalomban levő test nem marad nyugalomban. Engedelmeskedik annak a gyenge hatásnak, ami a Föld forgása miatt a függőleges irányt kicsit eltéríti, pedig nem erő, mert nem test okozza. Épp ezért ez a vonatkoztatási rendszer *nem inerciarendszer*. A helyi gravitációs függőleges irány egy inerciarendszerben érvényes, de a földi függőleges csak egy gyorsuló rendszerben, vagyis egy nem inerciarendszerben.

A lemezjátszón pörgő kiscica saját vonatkoztatási rendszere inerciarendszer?

Ha a tankönyvek megengedik azt, hogy függőlegesnek nevezzünk egy olyan irányt, amelyet csak egy gyorsuló rendszerben követ egy elengedett test, akkor elvileg más gyorsulásnak ugyanígy helyet kell engednünk a függőleges irány definíciójában.

A SÚLYPONTÁTHELYEZÉS fejezetben buszon utazó ikrek egyikét nézzük meg még egyszer. A történet szerint a buszvezető a fékbe tapos, a busz lassul, és az emberke tömegközéppontjára egy "tehetetlenségi erő"-nek hívott valami hat. Ezt megbeszéltük a TEHETETLENSÉGI ERŐ fejezetben.

De ha a vonatkoztatási rendszerünket az utca helyett a buszhoz és saját magunkhoz rögzítjük (automatikusan így teszünk a buszra szállva), akkor azt látjuk, hogy amikor ez a rendszer az utca inerciarendszerében "gyorsul" (ez esetben a sebességét csökkenti), akkor a busz belsejében a függőleges irány a szokásoshoz képest megdől. Megváltozik az az irány, amerre a kapaszkodó és a függőón mutat, amerre az elengedett tárgy esik. Ha nem látnánk ki a buszból, ha nem tudnánk, hogy ez egy fékezés eredménye, és ha ez az állapot hosszú ideig fennállna, akkor csak tudomásul vennénk, hogy a függőleges irány a padlóhoz képest kicsit ferde. És áthelyezkednénk úgy, hogy az érzékszerveink szerint az éppen érvényes függőleges irány nekünk lefelé mutasson, arra, amerre a függőón lóg. Ezután megállapíthatnánk magunkban, hogy ki lehetett az a hülye, aki a busz padlóját ferdén szerelte be, így utazáskor egy lejtőn kell állnunk.



Mondhatjuk tehát, hogy a fékező buszon valójában *a függőleges irány változik meg*. Ebből eredően a test (emberke) súlyvonalának az iránya is megváltozik, követi a függőlegest. És így általánosan érvényes maradhat a stabilitás fogalmának az a meghatározása, hogy a súlyvonal a feltámasztási pontok, a lehetséges eseti forgáspontok közé mutat, és csak a súly forgatónyomatéka számít.

Ha nem lenne szabad ilyen helyi eltérítő hatásokat a függőleges irány megállapításába bevonni, és csakis a Föld tömegvonzása számítana, akkor a Föld körül keringő *űrhajón is* lenne "lefelé" irány. A Föld tömegközéppontja felé mutató vonal. Pedig nincs olyan űrhajós, aki ez hívná lefelé iránynak, merthogy ott nincs súly, nincs leeső test, a függőón a levegőben kóvályog. Az űrsiklónak sokszor a tetejét fordították a Föld felé, hogy jól láthassák. Eszerint ők fejen álltak? Nem, a súlytalanságban nincs értelme a függőleges irány keresésének.

Összefoglalva: függőleges iránynak nevezhetjük a helyi gravitációs függőlegest, ami a világűr minden pontjáról nézve ugyanazt jelenti, vagy nevezhetjük annak a földi függőlegest, amely egy inerciarendszeren kívüli, "törvénytelen" hatást is magába foglal; vagy nevezhetjük annak minden pillanatban a mozgásunk által is befolyásolt, **saját függőleges** irányunkat, amit mi mindig az egyensúlyszervünk vagy egy függőón alapján tudunk megmutatni. Az EGYENSÚLY fogalma csakis ez utóbbihoz köthető.

Súly és tömeg

Tipikus hiba azt mondani, hogy egy autó megtolásához azért kell akkora erő, mert az autónak *nagy a súlya*. Nem! Az autót nem akarjuk felemelni, akkor hogy jönne ide a súlya? Az autót csak *megmozdítani* akarjuk. Tény, hogy a kerekek enyhén belapulnak, és ez egy kicsit nehezíti a kocsi gurulását, de ez most nem érdekes. Ha egy szuperfinom görgősoron akarsz eltolni egy dög nehéz gőzgépet, vagy a vízen megtolni egy bárkát, akkor sem lesz a test megmozdítása könnyebb.

A hétköznapi szóhasználatban megengedett és megszokott dolog a nagy tömeget a nagy súllyal összekapcsolni, sőt, azonosként kezelni, hiszen arra kérdésre, hogy mekkora a súlyod, megadod a tömegedet kilogrammban. Megszoktuk azt, hogy egy kilogrammnyi tömegnek mindenhol egy "kiló" a súlya, és ez az egyszerűsített információ általában elég is. De egy fizikapéldában, fizikaórán eszedbe se jusson ilyesmi.

Fordíts figyelmet arra, hogy *ezt a hibát nehogy elkövesd*. Az autót te gyorsítani próbálod, nulláról néhány km/h sebességre. És amikor meg akarod állítani, akkor hasonló erővel kell nekifeszülnöd a másik irányba. Te a test tömegét hozod mozgásba vagy állítod meg, az erőt ezért kell kifejtened. Ha összekevered, a mozgástani számításaid sehogy sem fognak kijönni.

Keresd meg a törvényt, ami a test lefékezéséhez szükséges erőt írja le!

Az űrhajósok hamar megtanulják a különbséget, amikor átrakodják a szállítmányt az űrállomáson. Ott minden test lebeg, súlytalanság van, egyetlen testnek sincs *súlya*. De a tömegük nem tűnt el, ezért amikor egy élelmiszeres konténert visznek egyik helyről a másikra, erő kell ahhoz, hogy megmozdítsák. És ha valamelyikük elfeledkezne a tömeg és a súly különbségéről, majd rájön, amikor a konténert csak úgy félkézzel akarja megállítani, és az a falhoz nyomja, mert a dinamika minden körülmények között megszeghetetlen alaptörvénye a nagy tömeg mozgásának megváltoztatásához nagy erőt ír elő.

A kikötőkben a hajók kapitányai is azért olyan különösen óvatosak, mert ha a hajó kicsit rossz irányba indul meg, akkor nem lehet olyan egyszerűen másfelé kormányozni, mint egy autót. Ha egy hatalmas utasszállító kikötéskor nekimegy a mólónak, akkor hiába megy csupán egy sétáló ember sebességével, kaviccsá aprítja a fél kikötőt, mire azt az óriási tömeget az ütközés ereje megfékezi. És ennek semmi köze ahhoz, hogy a hajó a vízre mekkora súllyal nehezedik. Hasonló jelenet van a Jedi visszatér végén, nem sokkal a Császár halála után: az egyik csillagromboló letér a pályáról és a gigantikus űrhajó az orrát lassan belefúrja a Halálcsillagba, anélkül, hogy ez lelassítaná, mert ekkora tömeg nem áll meg egy ütközéstől sem, pedig *súlya* egyáltalán nincs.

Mennyi a keringő űrhajón a 120 kilogrammos élelmiszeres konténer súlya?

A fizikusok, csillagászok semmi jelét nem találták annak, hogy ez a dolog a Világegyetemben bárhol másképp működne.

Hát persze, hogy nulla.

Fajsúly

Ezt a fogalmat ma már leginkább csak folyadékok és gázok mechanikájánál használjuk. **A fajsúly az egységnyi (1 m^3) térfogatú anyag súlya, ami a sűrűségével egyenesen arányos**. Csak mivel a gravitáció és a súly *helyi* fogalom, ezért a fajsúly főleg egy adott helyen a különböző anyagok és testek súlyának összehasonlítására alkalmas. *Helyette inkább a sűrűséggel számolunk*, mert az a tömeghez hasonlóan állandó. A test fajsúlyának kiszámítása előtt megállapítjuk a térfogatát, megmérjük a súlyát, ebből kiszámítható a fajsúlya. Összetett testnek, például egy hajónak csakis egy átlagos fajsúlya mondható meg. A hajótestet alkotó vas fajsúlya sokkal nagyobb a vízénél, de a hajó belsejében sok levegő van, ezért az egész hajó plusz a rakomány átlagos *faj*súlya kisebb, mint a vízé, ezért marad fenn rajta.

$$\gamma = \frac{G}{V}$$

ahol γ (gamma) a fajsúly, $\mathbf{G}$ a test súlya, $\mathbf{V}$ pedig a térfogata. A mértékegysége

$$[\gamma] = \frac{N}{m^3}$$

Ha γ a fajsúly, ρ a sűrűség és $\mathbf{g}$ a helyi nehézségi gyorsulás, akkor

$$\boxed{\gamma = \rho \cdot g}$$

Sűrűségből fajsúly kiszámítása: 1 m^3 vas sűrűsége 7800 kg/m^3, 1 kg tömeg súlya kb. 10 N, ekkor a vas fajsúlya kb. 78 ezer N/m^3. Fajsúlyból súly: Mennyi a súlya 2 dm^3 vasnak? Ez 0,002 m^3. Ennek a súlya 0,002·78000=156 newton. (Ami abból is kijönne, hogy 2 dm^3 vas tömege 15,6 kg.) Az alumínium fajsúlya kb. 27 ezer N/m^3, a víz fajsúlya kb. 10 ezer N/m^3, lásd a sűrűségnél. Azért kb., mert a nehézségi gyorsulás is csak kb. 10.

Megjegyzés: a fajsúly tárgyalásában a súly helyett tulajdonképpen végig a *nehézségi erőről* van szó, csak a tankönyvek ezt az általános szóhasználatnak engedve lazán kezelik. Mivel a fajsúly mérésekor rendszerint nyugalmi helyzetben vagyunk, nincs közöttük eltérés.

Mozgást akadályozó erők

A tehetetlenség törvénye értelmében egy meglökött test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását. Vagyis ha elütünk egy golflabdát, akkor a végtelenségig kellene repülnie. De nem így történik, a Föld gravitációs ereje a labdát visszahúzza a földre. Rendben, ezt értjük, a tömegvonzás ismert dolog, egy test, a Föld vonzása megváltoztatja a mozgásállapotot. De akkor a földön a golyónak körbe-körbe kellene gurulnia, nem? Nincs semmilyen test, ami ebben akadályoz, pedig a labda már a levegőben is lelassult, aztán a földön gurulva is lelassul, majd megáll.

Természetesen tudjuk a választ, a golflabda és minden más test mozgását, nemcsak haladó, hanem forgó mozgását is erők lassítják. Van, amelyik nagysága állandó, ezért a test egyenletesen lassul, de van másfajta erő is, ami miatt a test sebességváltozása jóval összetettebb. A mozgást akadályozó külső mechanikai erők, vagyis a **súrlódás**, a **gördülő-ellenállás** és a **közegellenállás** egyes esetekben hasznunkra vannak, máskor pedig jobb lenne, ha nem lennének. Vegyük őket sorra.

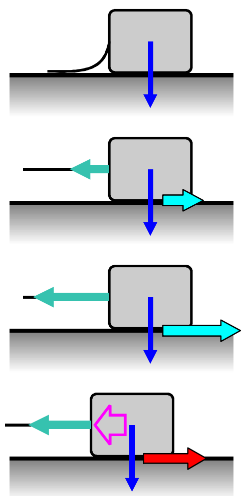
Súrlódási erők

A mozgást akadályozó külső erők legismertebbike a súrlódásból származik, a két érintkező felület egymáson való elcsúszását nehezítő jelenségből. A mindennapi életben számtalan módon *használjuk* a súrlódást, a járástól a tárgyak megfogásán át a bevert szögekig és fékpofákig. Súrlódás hiányában minden lecsúszna az asztalról. Sok más esetben pedig megszabadulni próbálunk tőle, mert a mozgás fenntartásához több erőt tesz szükségessé, és a felületeket koptatja és felhevíti.

A súrlódási erő ($\mathbf{F}_S$) összesen két dologtól függ: a két súrlódó felületet összenyomó erőtől ($\mathbf{F}_{ny}$), és a felületekre jellemző, mérésekkel megállapítható, mértékegység nélküli **súrlódási együttható**tól, amelynek a jele μ (mű). Bár a tapasztalatainkkal ez talán ellentétben állónak látszik, mégis tény, hogy a súrlódási erő *nem függ a felületek nagyságától.*

$$F_S = \mu \cdot F_{ny}$$

A súrlódási erővel a felület a testre hat, mindig a mozgást hátráltató irányban. A test ugyanekkora súrlódási erővel hat a felületre, ellentétes irányba. Az ábrán a nyilak a test*re* ható erőket jelzik.



A súrlódási erőknek két típusa van: a **tapadási** és a **csúszási súrlódás** ereje. A tapadási súrlódás akkor érvényesül, amíg a két felület még nem mozdul egymáshoz képest. Amikor a felületek már megmozdultak, a csúszási súrlódás jut szerephez.

A **tapadási súrlódási erő** a mozdulatlan testek közötti erőegyensúly egyik lehetséges összetevője. Ellenerő, mivel csak olyan mértékben keletkezik, amekkora erővel leküzdeni próbáljuk. De nem tud egy bizonyos értéknél magasabbra nőni, erre utal a "max" jelzés:

$$F_{tS\,max} = \mu_t \cdot F_{ny}$$

Példa: A nyomóerő 10 N, a μ értéke 0,4, a test nem mozog. Mi történik, ha a testet 3 N-nal húzzuk? Válasz: A tapadási súrlódási erő maximuma $\mu \cdot F_{ny}$, 10·0,4=4 N. A húzóerő 3 N. Ha a súrlódási erő 4 N lenne, akkor a két erő eredőjeként a testet hátrafelé gyorsítaná egy 1 N nagyságú erő. Tehát áll a test, mi meghúzzuk, erre az elindul a másik irányba? Ilyen természetesen nem történik, mert a súrlódási erő ***legfeljebb*** 4 N, és *igazodik* az elmozdításra törekvő erőhöz. Ez esetben a súrlódási erő nagysága is 3 N, és a húzással ellentétes irányba mutat.

Amikor az elmozdítás érdekében az erőt növeljük, és átlépjük a tapadási súrlódási erő maximumát, akkor a felületek "megcsúsznak", mozogni kezdenek, a helyzet megváltozik.

Amikor a felületek mozognak egymáson, akkor már a **csúszási súrlódási erő** (piros nyíl) az, ami a mozgást nehezíti, és annak fenntartásához erőt tesz szükségessé.

$$F_{csS} = \mu_{cs} \cdot F_{ny}$$

A csúszási súrlódási erő már nem ingadozik, hanem pontosan egyenlő a képlet szerintivel, de egy másik μ értékkel kell számolni, a csúszási súrlódási együtthatóval, jelöljük μ_{cs}-vel. **A csúszási súrlódási együttható többnyire kisebb a tapadásinál**, vagyis ha már sikerült a testet megmozdítani, akkor a továbbiakban kisebb erő is elég lesz az egyenletes mozgás fenntartásához, az előző ábrán a piros nyíl rövidebb is a maximális tapadási súrlódási erőnél.

Megjegyzés: amikor a pezsgősüvegből ki akarjuk húzni a dugót, csavargatni kezdjük. Ez azért segít, mert ha csavarással sikerül a dugót megmozdítani, akkor a tapadási helyett már csak a csúszási súrlódás tartja, emiatt kifelé is könnyebb húzni.

Ha a megcsúszást meg akarjuk előzni, akkor magasabbra kell emelnünk a tapadási súrlódási erő maximumát. Ehhez vagy "durvább" felületre van szükség, amelynek nagyobb a μ együtthatója, vagy erősebben kell összenyomni a két felületet. Ha viszont kisebbíteni akarjuk a határértéket, a megcsúszáshoz szükséges erőt, akkor vagy az összenyomás erejét kell csökkenteni, vagy a μ-t, az utóbbira való a gépolaj és más síkosító anyagok.

Melyik súrlódási erő igazodik a helyzethez és melyik állandó?

A felületeket összenyomó erő az, amennyivel *az egyik test* nyomja a másikat. Az ellenerő nyilvánvalóan ugyanekkora, mert kiegyenlítik egymást.

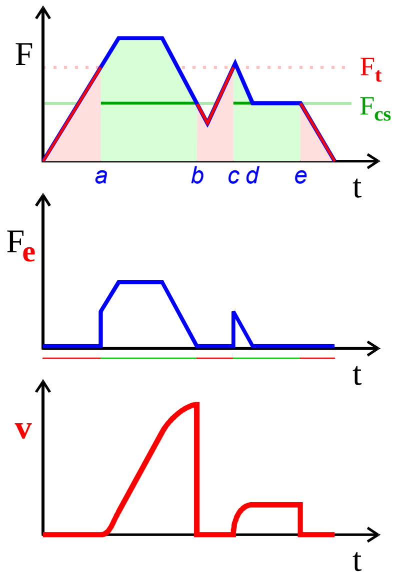
Példa: a nyomóerő 10 N, a μ_t értéke 0,4, a μ_{cs} értéke 0,25, a húzóerő 3 N. Mozog a test? Nem, mert a súrlódás 4 N-ig képes ellentartani, lásd fent.

Most óvatosan megbökjük a testet, mi történik? Megmozdul és mozgásban marad, gyorsul. Miért? Mert a megmozdításakor a tapadási helyébe a csúszási súrlódás lépett, ami 10·0,25=2,5 N. A húzóerő 3 N, vagyis a testet 0,5 N erő egyenletesen gyorsítja.

A testet megállítjuk, majd elengedjük, mi történik? A test állva marad. A megállításakor ismét a tapadási súrlódás jelentkezett, ami 4 N-ig ellenáll a húzásnak, a testet pedig csak 3 N húzza.

Másik felületre tesszük a testet, 5 N-nal húzzuk, de az nem mozdul. Mennyi a μ_t? A súrlódási erő jelenleg pontosan 5 N, mivel az erők egyensúlyban vannak. Eszerint az együttható **legalább** 0,5. Akkor fog pontosan kiderülni, ha a húzóerőt fokozatosan növeljük, és egyszer a test megmozdul.

A mozgató erő ritkán azonos nagyságú a csúszási súrlódási erővel. Ha kisebb, akkor a súrlódási erő felülkerekedik, a két erő eredője nem nulla, és a mozgás folyamatosan lassul, majd megáll. Ha nagyobb, akkor a mozgató erő felülkerekedik, a két erő eredője nem nulla, és a mozgás folyamatosan gyorsul, lásd a dinamika alaptörvényét. Ezért a gyakorlatban egy súrlódó test mozgatásának a sebessége sosem állandó, csak esetleg egy állandó érték körül ingadozik, kisebb-nagyobb kitérésekkel, ha a mozgató erőt mindig a szükségeshez igazítjuk. Amikor egy szánkót húzunk, akkor nem nagyon vagyunk tudatában, de a húzóerőnket folyamatosan szabályozzuk.



Ha érdekel, nézzünk végig együtt egy kísérletet egy sík felületen húzott testtel.

A felső diagram azt mutatja, ahogy egy testre különféle egyenletesen **változó erőt** fejtünk ki (kék). Méghozzá úgy, hogy amikor a test megmozdul, akkor az erővel mi "követjük", továbbra is húzva a testet. A piros pontsor azt mutatja, hogy a tapadási súrlódási erőnek mi a *maximuma*, a piros vonal pedig azt, hogy ebből mikor mennyi érvényesül. Tudod: a tapadási súrlódási erő soha nem lehet nagyobb, mint a húzóerő, különben a test hátrálna.

A középső diagram a húzóerő és a tapadási erő **eredőjét** mutatja. Ez nem lehet negatív, mert akkor a test hátrálna. Itt már jól látható, hogy amikor az erőt növelve elérjük a tapadási erő maximumát (*a*), a test megmozdul, ezzel a súrlódási erő ugrásszerűen csökken, mert a csúszási együttható vált érvényessé. Az erők eredője ennek megfelelően megugrik. A test növekvő sebességgel halad, az alsó diagramon lehet a **sebességet** követni. Amikor az erők eredője változik, akkor a gyorsulás is változik, tehát a sebesség-görbe parabolikusan ívelődni kezd.

Ahogy újra csökken a húzóerő, a súrlódás a tapadási alá esik, de az már nem érdekes, a mozgás egészen addig folytatódik, amíg a húzás ereje a csúszási súrlódás erejénél kisebb lesz (*b*). A test hirtelen megtorpan, hatni kezd a tapadási súrlódás. Az erőt ismét növeljük, a test újra megindul (*c*), ezután már csökkenthetjük a húzóerőt, mert ismét csak a csúszási súrlódás hátráltat. Addig csökkentjük a húzóerőt, hogy pontosan egyenlővé válik a csúszási súrlódással (*d*), de a test még mozog, az erők

> eredője nulla, a sebesség egyenletes. Végül az erőt csökkentjük, a test azonnal megáll (*e*). Keresd meg a szövegben leírtak értelmét a diagramokban, egy kis agytorna.
>
> A csúszó test sokszor látott szakadozott mozgásának tehát az az oka, hogy a mozgási állapotnak megfelelően hol a tapadási, hol a csúszási súrlódás lesz meghatározó, váltakozva.

A test súlya *csak az egyik* lehetséges forrása a felületeket összenyomó erőnek, sok más forrása is lehet. Ha egy tárgyat satuba fogunk, akkor a felülete és a satu felülete közötti súrlódási erő fogja megakadályozni a tárgy elmozdulását. Ha mégis elmozdul, húzunk egyet a satun, növelve a nyomóerőt. Ha a tárgy ezt nem bírja ki és megreped, akkor rájövünk, hogy egy közéjük tett ronggyal vagy smirglicsíkkal is próbálkozhattunk volna, a nyomóerő helyett a μ együtthatót növelve.

Ha egy pohár vizet megfogunk, akkor azért tudjuk felemelni, mert a kezünk és a pohár fala között tapadási súrlódás van, a szükséges nyomóerőt a kezünk szorításával hozzuk létre, ilyenkor a pohár súlya a súrlódási erőt pont leküzdeni próbálja. Erről meggyőződhetünk, ha beolajozott kézzel emeljük fel a poharat. (Lehetőleg olyan helyen, hogy a szilánkok összesöprése ne legyen nehéz.)

Gördülő-ellenállási erő

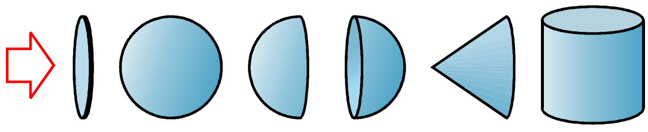
Kézenfekvő ötlet, hogy a mozgás megkönnyítéséhez a felületek közé görgőket, golyókat, kerekeket tegyünk. (Kézenfekvő? A maják állítólag csak gyerekjátékokon használtak kereket, a munkához nem.) Annak is van valamekkora ellenállása, a **gördülő-ellenállás** (néha gördülő súrlódásnak is mondják, bár ez nem igazán jó kifejezés), ami abból ered, hogy a görgők a felületek érintkezési pontjainál benyomódnak. Ezt egy acélgolyónál szabad szemmel nem fogjuk látni, de erős nagyításban nézve bizony ott van az a belapulás. A másik ok pedig az, hogy a görgő picit beül a felületek apró recéi közé, ezen a felület felcsiszolásával, kisimításával lehet javítani. A **gördülő-ellenállási erő** a fenti két társához hasonlóan számítandó ki, csak egy harmadik fajta együtthatót kell elővenni, a szintén méréssel kideríthető μ_g-t. Általában

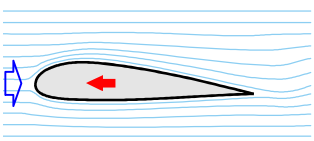
$$\boxed{\mu_g < \mu_{cs} < \mu_t}$$

Közegellenállási erő

A mozgó testre, hacsak nem vákuumban történik az a mozgás, a környező anyag szintén egy lassító erővel hat. Ez az "közeg" egy ágyúgolyónál, repülőnél, ejtőernyősnél a levegő, egy hajónál vagy torpedónál pedig a víz. A közegellenállásnak is van hasznos változata, például a vitorlába kapaszkodó szél, a vízimalom lapátjaiba ütköző víz ellenállása, de inkább akadályozó tényezőként szoktunk vele foglalkozni. A közegellenállás folyamatos legyőzésére kell a repülőkbe, hajókba motor.

A közegellenállás ereje több paramétertől függ. A legismertebb a **közegellenállási tényező**, más néven **formatényező** (a képletben **c**-vel jelölve), amit úgy közelíthetünk meg, hogy így számszerűsítjük a test "alakját". A szélerősség-mérő kanala vagy az ejtőernyő azért olyan alakú, mert az ilyen homorú formának nagy a légellenállása, és ezeknél ez a cél. Egy lapos felületnek, az áramlásra merőlegesen, valamivel kisebb a közegellenállási tényezője, még kisebb egy gömbfelületé, a legkisebb pedig azoké az *áramvonalas* testeké, amelyek kifejezetten a közegellenállás minimalizálására vannak kitalálva. Ezek jellemzője, hogy az áramlást lassan választják ketté, az elejük csúcsszerűen hegyes. A hajónak, rakétának az eleje ezért hegyes.





Vannak olyan áramvonalas testek is, amelyeknek az eleje gömbölyű, a vége hegyes, "cseppszerű". Ez azért lehet hasznos, mert az is befolyásolja az ellenállást, hogy az áramlás hogyan hagyja el a testet. Az örvénylésbe kezdő közegnek nagyobb a visszahúzó ereje, mint a sima vonalban távozó áramlásnak. A rajzon egy repülőgépszárny profilját látod, a körülötte áramló levegővel.

A test ellenállása függ a **homlokfelület**ének a területétől is (**A**). A test homlokfelülete az a síkidom, aminek a test látszik az áramlás irányából nézve. A fenti ábrán az első öt test homlokfelülete kör, az utolsóé téglalap alakú. A szélesebb tárgy közegellenállása nagyobb, mint egy keskeny tárgyé.

Függ az erő a **közeg sűrűségé**től is (ρ, rhó, *ne téveszd össze a kis p-vel*), a ritkább levegőnek kisebb a közegellenállása, ezért kapaszkodnak olyan magasra a repülőgépek, üzemanyagot áldozva az emelkedésre, de megtakarítva utána a kisebb ellenállással. A folyadékok sűrűségét állandónak tekinthetjük, ezért ott ennek nincs gyakorlati jelentősége, csak a különböző folyadékok összehasonlításakor érdekes. (Folyadékoknál bejöhet a képbe a *viszkozitás* is, például a méz sokkal viszkózusabb, mint a víz.)

A legfontosabb: *a közegellenállás négyzetesen függ az áramlás **sebességétől*** ($\mathbf{v}$). Ha megkétszerezzük a sebességet, négyszereződik az ellenállás ereje. Csak ezért történhet meg az, hogy az ejtőernyős sebessége állandósul, pedig először szabadeséssel, gyorsulással indul. A légellenállás ereje – *ellentétben a csúszással és gördüléssel* – a sebesség növekedésével együtt emelkedik, és egy bizonyos sebesség elérésekor kiegyenlíti a test nehézségi erejét, egyenletes mozgás jön létre.

$$\boxed{F_{kö} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot A \cdot \rho_{kö} \cdot v^2}$$

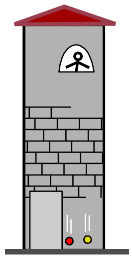
Egy feladatban nem mindig szükséges egyenként megadni a $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ és $\boldsymbol{\rho}$ értékeit. Ezek a test mozgása során nem változnak, csak a sebesség. Ezért közölhetők egy adatként, ez az **áramlási szorzó**, a jele $\mathbf{Z}$, és ekkor a képlet egyszerűsödik:

$$F_{kö} = Z \cdot v^2$$

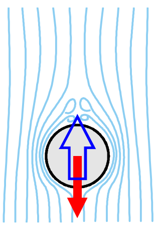
$$\left(Z = \frac{1}{2} \cdot c \cdot A \cdot \rho_{kö} \right)$$

Van egy papírsárkányom, a tengerparton az áramlási szorzója Z=0,51. Nem általában a papírsárkányoké, hanem ezé a sárkányé, tengerszinti légnyomásnál. **Hány km/h sebességű szélben szakad el a zsineg, ha a teherbírása 550 N?** $550=0{,}51 \cdot v^2$, ebből v=32,8 m/s, azaz 118 km/h. **A sárkány sík lap, a szélre merőleges. Mekkora a területe?** A számítás a megadott Z-ből indul ki, a képlet szerint. Keresd meg a függvénytáblázatodban a levegő sűrűségét! A sík lap formatényezője az előző ábra szerint c=1,11. A sűrűségre azt találtad, hogy $\rho=1{,}293$ kg/m^3, ebből $A=2Z/(c \cdot \rho)=0{,}71$ m^2.

A SÚLYTALANSÁG fejezetben szó esett Galilei (meg nem történt) kísérletéről **a leejtett golyókkal**. Azzal, hogy azonos méretűek voltak, elvileg kiküszöbölte a légellenállás befolyását az eredményre. Csakhogy a dolog *valójában* nem így működik. Ha leejtünk egy fémgolyót és egy pontosan ugyanakkora szivacsgolyót, azt látjuk, hogy *nem egyszerre érnek földet*. Az egyforma alakkal ugyanis csak a $\mathbf{c}$-t, a közegellenállási tényezőt tettük azonossá. A képletben nem szerepel a test tömege, mégis számít. No, rájössz, hogy mi a probléma? Gondolkozz ezen egy kicsit, próbaképpen. **…**



A leejtés során a testre csak a nehézségi ereje hat, ezért szépen el is indul lefelé ugyanazzal a nehézségi gyorsulással, bármiből is van, bármekkora is a tömege. A közegellenállás ezt az esést fékezi, és ahogy a test sebessége növekedik, az ellenállás ereje is növekedik. <u>A nehézségi erőt végül kiegyenlíti a közegellenállási erő</u>, és a test onnantól egyenletes sebességgel esik tovább, mert a rá ható két erő eredője nulla.



Kiegyenlíti. De hol? A testet a nehézségi erő húzza lefelé, az pedig *csak a tömegétől függ*. Tehát a légellenállásnak nem mindig ugyanakkora nehézségi erőt kell kiegyenlítenie. Szivacslabdánál kicsit, fémgolyónál nagyot. A légellenállás pedig *csak a sebességtől függ*. A szivacslabdánál a légellenállás már korábban, kisebb sebességnél egyenlővé válik a nehézségi erővel, a fémgolyónál ehhez nagyobb sebességre van szükség. Tehát a fémgolyó egyrészt előnyt szerzett azzal, hogy később állandósult a sebessége, hosszabb ideig gyorsulhatott, és előnyt szerez azzal, hogy nagyobb sebességnél állandósul az esése, tehát a kiegyenlítődés után is nagyobb a sebessége.

Nem a légellenállás függ a tömegtől, nem is a gyorsulás, hanem a nehézségi erő, amivel a légellenállás megküzd.

Mi volt a szándék azzal, hogy azonos méretű és alakú golyókkal végzünk kísérletet?

Akkor Galilei tévedett? Nem igazán. Ő valójában *lejtőn legurított golyókkal* kísérletezve figyelte meg a tömegtől független gyorsulást, kis sebességnél. És **a nehézségi gyorsulás tényleg egyforma**, légüres térben ezt sokszor igazolták is. Hogy mi lett volna látható, ha elvégezte volna az ejtést az 57 méteres pisai ferde toronyból? Az a kérdés, hogy ekkora úthosszon a levegő lassító ereje okozott volna-e látható eltérést. A válasz: igen. Ha érdekel, az alábbi részben elolvashatod, hogyan lehet ezt számításokkal kideríteni, és hogy mi az előbbi leírásnál még pontosabb igazság.

Számítsunk ki egy ejtést két 10 cm átmérőjű gömbbel, az egyik fából, a másik vasból van. A gömb közegellenállási tényezője 0,45. A sűrűségük 700, illetve 7800 kg/m^3, a tömegük eszerint 0,37 kg és 4,08 kg (ellenőrizd!), a légnyomást ezen a kis magasságon belül vegyük állandónak, akkor a levegő sűrűsége legyen 1,293 kg/m^3. A golyók nehézségi ereje (m·g) 3,63 N és 40,06 N. Mekkora sebesség kell a nehézségi erőkkel azonos légellenállási erők létrejöttéhez?

A képletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{c \cdot A \cdot \rho_{kö}}}$$

A test homlokfelülete az a síkidom, aminek a test látszik az áramlás irányából nézve. Egy gömb esetében ez egy kör. 10 cm-es átmérő esetén a területe A=0,0079 m^2. c=0,45, ρ=1,293. Azt az állapotot nézzük, amikor a golyó már egyenletes sebességgel esik, és az a kérdés, hogy ez a sebesség mekkora. A sebesség azért egyenletes, mert az F közegellenállási erő ekkor kiegyenlíti a golyó nehézségi erejét, vagyis egyenlő vele, F=m·g. Behelyettesítve az adatokat, a fagolyó kiegyenlített esési sebessége 39,74 m/s (143 km/h), a vasgolyóé 132,03 m/s (475 km/h).

Nincs az eredményben csalás, mert *a két golyó légellenállása azonos sebességnél tényleg ugyanannyi*. Amikor még lassan esnek, akkor nincs is közöttük eltérés. De amikor a két golyó együtt zuhanva eléri a 39,74 m/s sebességet, a fagolyó sebessége nem nő tovább, mert a légellenállás pont annyi lett, mint a fagolyó nehézségi ereje, a fagolyóra ható két erő eredője ezzel 0 lett, és nyugalmi helyzet, egyenletes sebesség jött létre. Az előbbi kis ábrán ezt az állapotot mutatom. Ez a légellenállási erő viszont jóval kisebb a vasgolyó nehézségi erejénél, ott az erők eredője nem nulla, hanem lefelé mutat, a vasgolyó tovább gyorsul, növeli a sebességét, és lehagyja a fagolyót.

Ha a golyókat nagy kezdősebességgel dobnánk lefelé, akkor a légellenállás eleinte nagyobb lenne a golyók nehézségi erőinél, a rájuk ható erők eredője felfelé mutatna, a golyók lassulnának. A kiegyenlített erőállapot ebből az irányból is ki tud alakulni. Ezért van az, hogy amikor az osztrák Felix Baumgartner 2012-ben 39 km magasról kiugrott a kabinjából, a ritka légkörben először sikerült 1342,8 km/h rekordsebességet elérnie, de lejjebb érve végül ő is lefékeződött a szokásos 200 km/h körüli sebességre, amennyivel az ejtőernyősök általában zuhannak, *mielőtt* az ernyőjüket kinyitják. Az ejtőernyő formatényezője és homlokfelülete sokkal nagyobb, ezért a sebesség végül 15-20 km/h-ra csökken.

Nekiugorhatnánk kiszámolni azt, hogy a kiegyenlített zuhanási helyzet mennyi *idő* alatt jön létre a két golyónál, hiszen ismert a gyorsulás, a sebesség. Csakhogy így elfelejtkeznénk arról, hogy a golyót a nehézségi erő és a légellenállás különbsége gyorsítja. A légellenállás viszont folyamatosan nő, négyzetesen, akkor tehát *a különbségük, a gyorsító erő, a gyorsulás folyamatosan csökken*. (Nem is egyformán.) A változó gyorsulással való számoláshoz durvább matek kell, mint amit érdemes megtanulnod, ezért itt a dolgot akár be is fejezhetnénk.

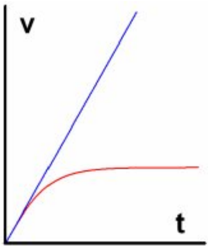
Képletet nem tudunk adni, de a számítógép mire való, ha nem erre? Nem kell hozzá speciális program, elég egy Excel vagy más táblázatkezelő is. Kiszámíttatjuk vele *az aktuális gyorsulásokat nagyon kis időszakaszokra*, majd ezeket összegeztetjük a programmal. Felosztjuk az időt apró szakaszokra, olyan aprókra, hogy az az alatt történő mozgásváltozásoknak az egyenletes gyorsulások kiszámítására szolgáló képletekkel való kiszámításai kellő pontossággal meg fogják közelíteni a valóságot, és ezeket összerakva külön képlet nélkül is megismerjük a zuhanás adatait. Mondhatjuk úgy, hogy a sebességváltozás görbéjét apró egyenes szakaszokkal helyettesítjük, amelyek ha elég rövidek, számunkra elegendő pontossággal adják meg az igazi, általunk nem ismert és képlettel meg sem adható görbét. Érdemes kipróbálnod, érdekes lesz. (A numerikus analízis nevű matematikai szakág foglalkozik az ilyen közelítések elméletével.)

Írd be az Excel megadott táblázatcelláiba a következő értékeket: **A2:**0,37; **B2:**0,45; **C2:**0,0079; **D2:**1,293; **E2:**9,81; az értékeket nyilván felismered. Azért írjuk külön cellákba, és nem közvetlenül bele a képletekbe, hogy egyszerűen változtathass rajtuk, ha gusztusod támadna kiszámítani a dolgot ólomgolyóra, ejtőernyősre, vagy éppen a Mars felszínére. Föléjük odaírhatod, hogy mi micsoda. Ha nálad a tizedesvesszőt ponttal kell jelölni, akkor csináld aszerint. **F2**-be a nehézségi erő képlete kerül: =A2*E2. Tovább: **A5:**0; **F5:**0; **G5:**0.

Az időegységek hossza **G2:**0,1. **A6**-ban az időt léptetjük: =A5+G$2 . **B6**-ban lesz a légellenállás ereje *az előző* időszakaszban érvényes sebesség alapján: =0.5*B$2*C$2*D$2*F5*F5 . Itt van a módszer lényege, tehát az, hogy mindig az előző értékből számolunk tovább. **C6**-ban lesz a nehézségi erő és a légellenállási erő különbözete, mint eredő gyorsító erő: =F$2-B6 . A pillanatnyi gyorsulást ez idézi elő a testen:

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{G - F_{kö}}{m} = \frac{m \cdot g - F_{kö}}{m}$$

Nehogy egyszerűsíteni próbálj m-mel! Összeg egyszerűsítésekor minden tagot ugyanazzal kell osztani, akkor pedig az $F_{kö}$-t is osztanod kellene m-mel.



A képlet részeit más cellákba már beírtuk, így **D6**-ban a pillanatnyi gyorsulás képlete egyszerűbb: =C6/A$2 . **E6**-ba kerül a sebesség változásának értéke, tehát az, hogy az aktuális időszakaszban az éppen érvényes gyorsulással mennyit nő a sebesség: =D6*G$2, itt számít az, hogy az időt mekkora szakaszokra daraboljuk. Most pedig jöjjön a kulcslépés: **F6**-ban a sebességváltozást hozzáadjuk az előző pillanatban érvényes sebességhez, =F5+E6 . És ha már hozzáfogtunk, akkor **G6**-ban számítsuk ki azt is, hogy ebben az időszakaszban mennyivel nőtt a megtett út teljes hossza: =G5+F6*G$2 .

Az **A6:G6** tartományt másold lefelé akárhány sorba, az Excelben ezt a műveletet lefelé kitöltésnek hívják, előtte ki kell jelölnöd egy nagyon sok sor magasságú tartományt. Így végül kapsz egy hosszú számoszlopot az F oszlopban a változó sebességekkel, a G oszlopban pedig minden pillanatra az addig megtett útról. A $ jelek gondoskodnak arról, hogy csak a szükséges cellaadatok változzanak a másolással.

Kész. Ha megnézzük a táblázatunkat, azt látjuk, hogy a sebességváltozás mértéke 12 másodperc elteltével már 0,01 m/s alá csökken, eddigre a fagolyónk 369 métert tett meg. Végül a sebesség 31,6 másodperc elteltével, 1147 méteres zuhanás után már 5 tizedesjegy pontossággal beáll a 39,74 m/s értékre, ahogy azt korábban mi magunk is kiszámítottuk. Csináltam belőle egy diagramot is, a piros görbe a zuhanási sebesség levegőben, a kék vonal a légüres térben, az első 1 perc alatt.

A táblázat tetején levő paraméterekkel nyugodtan kísérletezhetsz, amíg a program bírja a számítási pontossággal. Minél kisebb a test sűrűsége, annál kisebb sebességen áll meg a gyorsulás.

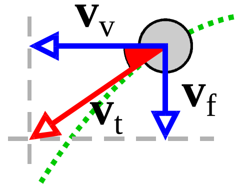
Ezt a kis lépésenkénti újraszámítgatásos, közelítő módszert **iteráció**nak hívják, és így meg lehet kerülni az ún. differenciálszámítást és még annál is sokkal kétségbe ejtőbb dolgokat. Elárulom, hogy a bolygópályák és műholdpályák számításakor is ilyesmit használnak a profik is, mert a sok égitest folyamatosan változó tömegvonzási hatását, zavarását ma még senki nem tudja képletekkel kifejezni. Eredetileg erre és ehhez hasonló célokra találták ki a "számító"gépet.

A táblázattal megtudhatjuk azt, hogy a pisai ferde toronyból a fagolyó 3,6 s, a vasgolyó (a tömegét A2-be írva) pedig kevesebb mint 3,4 s alatt érne földet. A különbözet, megismételt próbák során, felismerhető lett volna, tehát bizony, ha Galilei elvégezte volna a kísérletet, **látta volna a légellenállás okozta eltérést**. Galilei zseniális tudós volt, így aztán még az is lehet, hogy tudott a problémáról, és ezért is kísérletezett lassabb, guruló golyókkal.

Hajítások

Hajításnak hívjuk azt, amikor egy testet valamilyen kezdősebességre ($\mathbf{v}_0$) gyorsítunk valamilyen irányban, aztán szabadesésben magára hagyjuk. Az indítás szöge a függőlegesen lefelé iránytól a függőlegesen felfelé irányig terjedhet, bármilyen ferdeségben is. A szögnek megfelelően van vízszintes (0°) és függőleges (−/+90°) hajítás, az összes többi irány pedig ferde hajítás.

A test sebességének vektora minden pillanatban felosztható egy **v**ízszintes és egy **f**üggőleges irányú összetevőre, ezután **a két irány szerinti mozgást külön kezelhetjük**, de nem egymástól függetlenül. A test vízszintesen egy egyenes vonalú egyenletes sebességű mozgást mutat be, ehhez pedig *hozzátevődik* a függőleges irányú egyenletesen gyorsuló mozgása, adott kezdősebességgel. A légellenállást a számítások egyszerűsége érdekében figyelmen kívül hagyjuk.



Mindkét mozgásnak megvan a saját képlete, amelyekkel bármelyik $\mathbf{t}$ időpillanatra ki lehet számítani a test helyzetét. Ehhez kell egy koordinátarendszer, **origóként általában a test pályájának kezdőpontját választjuk**. Vízszintes irányban a test mozgási iránya a pozitív, függőleges irányban pedig lefelé pozitív a gyorsulás, a sebesség és az elmozdulás is. Ragaszkodj az így adódó előjelek következetes használatához.

A képletek felállítása során biztos pont, hogy **a két mozgás képletében az idő megegyezik**, hiszen ugyanabban a pillanatban nézzük meg a vízszintes és a függőleges irányú mozgást is. A repülés idejét a feladatokban gyakran az határozza meg, hogy az adott magasságból a test szabadesése mikor ér véget, ezért a függőleges mozgásösszetevő kiszámításával kapott időt kell a vízszintes mozgáshoz felhasználni, és akkor derül ki a test vízszintes elmozdulása a kezdőponttól. Mivel a pálya pontjainak koordinátái között négyzetes összefüggés van, ezért a pálya alakja *parabola*. A pillanatnyi sebesség vonala mindig *érintője* a pályagörbének.

A test $\mathbf{t}$ pillanatban vett sebessége $\mathbf{v}_t$ (vagy csak $\mathbf{v}$). Az összetevőivel való kapcsolatát a szögfüggvények és a Pitagorasz-tétel árulják el. (Nézd meg a *Matek* témakört.)

Függőleges hajítás

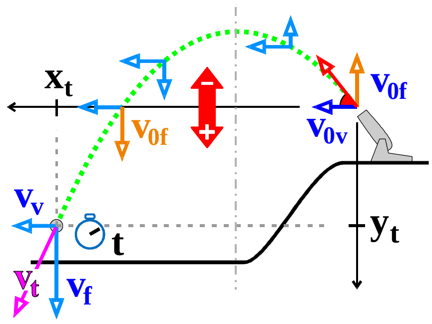
Itt vízszintes irányú mozgás nincs. A $\mathbf{v}_0$ vagy $\mathbf{v}_{0f}$ a kezdősebesség, ami felfelé negatív, mert a nehézségi gyorsulás lefelé mutat. A testet lefelé is "ki lehet lőni", ekkor a kezdősebesség pozitív. A függőleges sebesség ($\mathbf{v}_f$) egyenletesen növekszik. Ha felfelé indul, *akkor is*. (−4, −3, −2, −1, ez növekedés.) A gyorsulás a nehézségi gyorsulás, vagyis az általános mozgásképletekben $\mathbf{a}=\mathbf{g}$.

A Gyorsulás kezdősebességgel fejezetben megtanulhattad, hogy az olyan mozgásnál, amelyben a test sebessége előjelet vált, vagyis a test visszafordul, a megtett út és a testnek a kezdőponttól mért távolsága között lényeges eltérés van. Függőlegesen a test **y** koordinátája adja meg a test helyét, az origóhoz viszonyított elmozdulást, ez lehet negatív is. Az **x** koordináta 0.

Vízszintes hajítás: olyan ferde hajítás, amelyben α=0, a mozgás vízszintesen indul, a függőleges összetevő pedig egy 0 kezdősebességről induló szabadesés.

Ferde hajítás

Az α a $\mathbf{v}_0$ kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge +90° és −90° között, az előjele a függőleges tengelyhez igazodik. (Vagyis a felfelé 30 fok −30°.) A mindenkori sebesség vízszintes összetevője állandó, ezért az origótól vízszintes irányban mért távolság, az $\mathbf{x}$ (vagy $\mathbf{x}_t$, "az adott $\mathbf{t}$ időhöz tartozó $\mathbf{x}$") egyenletesen nő, megegyezik az egyenletes mozgás úthosszával. A függőleges sebességösszetevő a függőleges hajítás szabályai szerint alakul, az $\mathbf{y}$ (vagy $\mathbf{y}_t$) koordináta a függőleges elmozdulás. Az x és y képletei az út ($\mathbf{s}$) korábbi képleteivel egyeznek meg.



A pálya szimmetrikus, vagyis a felszálló és a leszálló ágban *bármelyik* magasságra a sebesség nagysága azonos, a vízszinteshez mért szöge pedig az előjelben különbözik. A narancs színű vektorok kezdőpontjainak magassága azonos, a vektorok nagysága azonos, egyébként a hozzájuk tartozó vízszintes vektorösszetevők, és emiatt a pályairányú eredővektorok nagysága is azonos.

A hajítások mozgásegyenletei az egyenletes és a gyorsuló mozgások már ismert képleteiből állnak:

$$v_{0v} = v_0 \cdot \cos\alpha \qquad v_{0f} = v_0 \cdot \sin\alpha$$

$$x = v_{0v} \cdot t \qquad y = v_{0f} \cdot t + \frac{g}{2} t^2$$

$$v_v = v_{0v} \qquad v_f = v_{0f} + g \cdot t \quad \rightarrow$$

$$t = \frac{x}{v_v} \quad = \quad t = \frac{v_f - v_{0f}}{g}$$

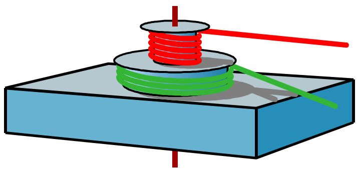
A következő fejezeteket a könyv teljes változatában olvashatod:

Körmozgás

Ha beakad a póráz.

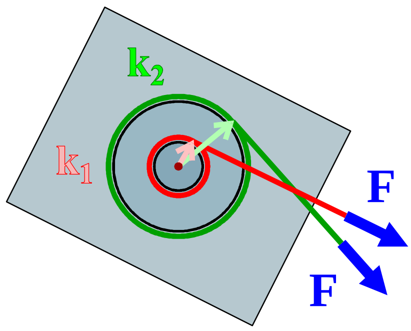
A következő fejezeteket a könyv teljes változatában olvashatod:

Forgatónyomaték



Az *Erők* témakörben már alaposan kitárgyaltuk a forgatónyomatékot és a hozzá kapcsolódó fogalmakat, például az egyensúlyokat vagy a stabilitást. Azokban a fejezetekben az erők a testeket mozdulatlanságban tartották. Most pedig a forgást előidéző forgatónyomatékról lesz szó.

$$M = F \cdot k$$



Ha egy testet meg akarunk forgatni, illetve **változtatni akarunk a forgás sebességén**, ahhoz erőt, egész pontosan **forgatónyomatékot** (erőmomentumot) kell a testre kifejteni.

Miért nem csak erőt? Azért, mert saját tapasztalatodból tudhatod, hogy ha meg akarsz pörgetni valamit, akkor nem mindegy, hogy a tengelyhez közel vagy attól távolabb fejted ki rá azt a forgató erőt.

A rajzon a téglatest megforgatása a cél, és választhatsz a piros és a zöld zsineg meghúzása között. Ha a két zsineget ugyanakkora erővel húzod meg, akkor a pirosat húzva a test lassabban pörög föl. Egy adott fordulatszám adott idő alatt történő eléréséhez pedig a piros zsineget *nagyobb* erővel kell húzni, mint a zöldet.

A zsineg meghúzásával az orsóra, hengerre mindig érintő irányú erőt fejtünk ki. A két zsineg között itt egyetlen különbség van: az erő hatásvonalának távolsága a forgástengelytől, vagyis a k erőkarok hossza. Ez egész egyszerűen azt jelenti, hogy a két azonos erő közül a zöld zsinegen közvetítettnek nagyobb a **forgatónyomatéka**. $M{=}F \cdot k$. Láthatod, hogy az $F \cdot k_1$ kisebb, mint az $F \cdot k_2$, tehát a piros zsineg gyengébben forgat. Vagyis ha meg akarjuk adni, hogy egy test forgatására mekkora erőhatást vetünk be, akkor közölni kell az erő nagyságát és a hozzá tartozó erőkar nagyságát is. Összességében a forgatónyomatékot.

Ha egy tengellyel rögzített testre több erő is hat, akkor mindegyik erő létrehozza a saját forgatónyomatékát. A FORGATÓNYOMATÉKOK ÖSSZEGE fejezetben példát is láthatsz arra, hogy

Több erő közös forgatónyomatéka egyenlő az egyes forgatónyomatékok előjeles összegével. Ha ez nem nulla, akkor a forgatónyomatékok *kiegyenlítetlenek*.

Mi a "rendes" neve annak, hogy adott fordulatszám adott idő alatt történő elérése? (Bétával jelöljük.)

Tehetetlenségi nyomaték

Azt, hogy egy haladó test tehetetlensége mit jelent, már kívülről tudod: ha a testre ható erők eredője nulla, akkor a test mozgása egyenes vonalú, egyenletes sebességű. Ha a test sebességét meg akarjuk változtatni, akkor erőt kell rá kifejteni, leküzdve a tehetetlenségét.

A forgómozgás hasonló. A nyugalomban levő <u>forgó</u> test fogalma azt jelenti, hogy a test vagy áll, vagy az adott tengely körül egyenletes szögsebességgel forog. Ha nincs súrlódás, akkor „évmilljókig eljár tengelyén”.

Azt már tudjuk, hogy ha a forgás sebességét meg akarjuk változtatni, ahhoz forgatónyomatékot kell kifejteni. Most nézzük meg, hogy a test ennek mennyire engedelmeskedik. Ha egyenes vonalban meg-tolunk egy testet, akkor az gyorsul, de a tehetetlenségétől függ az, hogy milyen ütemben. **A forgó test tehetetlensége a *tehetetlenségi nyomaték*.** A névből sejtheted, hogy itt ismét szerepe lesz a forgástengelytől mért valamilyen távolságnak.

A tehetetlenségi nyomaték értéke mindig egy adott forgástengelyre vonatkozik.

Ismerjük jól a jelenséget: amikor egy nagy tömegű vagy nagy méretű testet megforgatunk, erő kell, mire az felpörög, de aztán erő kell ahhoz is, hogy leállítsuk. Nagy tömegű vagy nagy méretű: ebből már ki is derül, hogy itt ez a két dolog számít.

Egy körmozgást végző <u>pontszerű</u> tömeg tehetetlenségi nyomatéka – a jele Θ (théta)* – egy adott forgástengelyre vonatkoztatva:

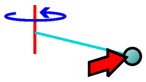
$$\Theta = m \cdot l^2$$

ahol $\mathbf{m}$ a tömeg, $\mathbf{l}$ pedig a pontnak a forgástengelytől mért távolsága, más szóval a *nyomaték karja*. Mértékegysége:

$$[\Theta] = kg \cdot m^2$$

A testnek azért kell pontszerűnek lennie, hogy egyértelmű legyen a tengelytől mérhető távolsága.

A tehetetlenség értékére azért van szükségünk, hogy megtudjuk, egy bizonyos erő mennyire gyorsítja fel a mozgást. (Lásd Newton II. törvényét.) Egyenes vonalú gyorsulásnál a tehetetlenséget egyenlőnek vesszük a tömeggel. **Körmozgásnál a tehetetlenség a tömegtől és a nyomaték karjától is függ**, ezért a "forgási tehetetlenséget" mindig *ki kell számítani*.



Képzeld el, hogy van egy forgástengely, amelyből egy egészen vékony, láthatatlan, de merev drót lóg ki oldalt, annak a végén pedig egy nagyon kis kiterjedésű, pontszerű test van rögzítve. A test tömege akármennyi lehet. Ha ezt a testet (nem a drótot) érintő-irányban, oldalról megtoljuk, akkor a test a tengely körül körpályán fog megindulni. A gyorsító erővel a test tehetetlenségét kell legyőznünk. Ha nagy a tehetetlenség, akkor kicsi a gyorsulás.

Szintén a tehetetlenségi nyomaték (más szóval *forgási tehetetlenség*) jut szerephez akkor, amikor a tengely körül keringő tömegpontot lassítani akarjuk. Az egyenes vonalú mozgás lassításához is erő kell a tehetetlenség legyőzésére, a körmozgásnál is erő kell a tehetetlenségi nyomaték legyőzésére.

Lehet, hogy úgy gondolod, hogy egy ilyen pici testnek szinte semmi a tehetetlenségi nyomatéka, nincs is ezen mit számolgatni. Ám ha a kar hossza több méter, a tömeg pedig több száz kiló, akkor máris érzed, hogy bele kell dőlnöd, hogy a kar elforduljon. (Nem azért, mert *nehéz*, hanem nehezen gyorsul!) A pici és a nagy között nincs *elvi* különbség, a fizika pedig az elvvel foglalkozik, nem a számokkal.

Emlékezhetsz, hogy a forgatónyomatéknál elmondtam: az erőkar csak egy képzeletbeli kar, láthatatlan, megfoghatatlan. Csak azért nevezzük karnak, mert úgy könnyebb beszélni róla. Itt is ez a helyzet, a kar merev, de láthatatlan, és **a kart nem tudjuk nyomni, csakis a kar végén levő testet**.

A forgatónyomatéknál mit nevezünk erőkarnak?

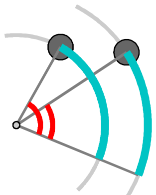
Azt mondja a képlet, hogy a forgástengelyhez közelebb levő tömegnek kisebb a tehetetlenségi nyomatéka. A test ott "kevésbé ellenkezik", jobban gyorsul, hamarabb ér el egy kitűzött sebes-séget. Csakhogy itt valami nem stimmel, mert hát mégiscsak egy tömeget gyorsítunk fel egy

---

* Azért írjuk th-val, mert valójában az ezzel jelölt hangot úgy kellene kiejteni, ahogy az angol *think*, *bath* szavakban, csak ehelyett az általános szokás szerint egyszerű "té"-t mondunk.

erővel, és a dinamika alaptörvényének érvényesnek kell lennie, akár közel vagyunk a tengelyhez, akár távol. **Az F=m·a törvény talán nem egyformán érvényes minden testre?**

De, a törvény érvényes, itt más okozza a látszólagos ellentmondást. A kérdés magyarázata ott keresendő, hogy *mit tekintünk sebességnek*. Egyenes vonalú mozgásnál a sebesség egyértelmű: az egy másodperc alatt megtett úthossz. Körmozgásnál viszont kétféle sebességünk van! Azt, ami itt az egy másodperc alatt megtett úthossz, azt kerületi sebességnek hívjuk, de nem ez kell nekünk. <u>A nyomatékokkal kapcsolatban "sebesség"-nek a szögsebességet tekintjük</u>.



Ha egy testet tolni kezdünk, és azt akarjuk tudni, hogy mekkora *utat* tesz meg, akkor tényleg mindegy, hogy a test ki van-e kötve valami tengelyhez. A körmozgásnál viszont azt tekintik a képletek és törvények fontosnak, hogy ehhez az úthoz mekkora *szögelfordulás* tartozik. Ha egy adott hosszúságú utat a tengelyhez közelebb teszünk meg, akkor a szögelfordulás, a piros ív nagyobb, mint ha a tengelytől távol tennénk meg ugyanekkora utat. A rajzon a két kék ív *hossza* megegyezik.

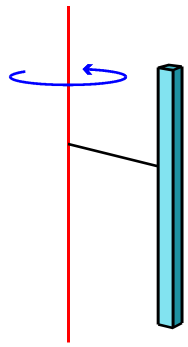
A tehetetlenségi nyomaték csak azért kisebb a tengelyhez közel, mert bár ugyanaz az erő és ugyanaz a test, nagyobb a szögelfordulás, egyszerűen így jön ki a geometriából. Az út hossza ugyanakkora lesz, de nagyobb lesz az egy másodperc alatt megtett szög, akkor nagyobb a szögsebesség, vagyis nagyobb a "sebesség". Ha a testet nagyobb "sebesség"-re tudtuk felgyorsítani, akkor nyilván kisebb volt a test ellenállása, más szóval a tehetetlensége, a logika ezt írja elő. Ha a hétköznapi fogalmaink szerint ez furcsa érvelés is, mi akkor is ehhez igazodunk.

A dinamika alaptörvényéből körmozgásnál milyen adatot tudhatunk meg?

Megbeszéltük, hogy egyetlen *tömegpont* tehetetlenségi nyomatéka micsoda, és tudjuk, hogy egy forgó *test* kis keringő tömegpontok összességeként fogható fel.

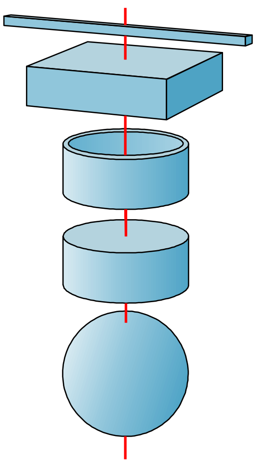
Egy test tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a testet alkotó tömegpontok tehetetlenségi nyomatékainak összegével, ugyanarra a forgástengelyre vonatkoztatva.

Itt már megint végtelenül kis mennyiségekből végtelen sok darabot kellene vennünk, ilyennel már akadt problémánk korábban is. De nem kell elmenni a végtelenekig. Képzeletben megteheted, hogy ha nem is végtelenül vékony, de elég vékony függőleges hasábokra osztasz fel egy testet, és így keresel egy közelítő értéket. Ez teljesen ugyanúgy menne, mint ahogy az általános iskolában úgy számítottátok ki egy szabálytalan síkidom területét, hogy lefedtétek 1 cm oldalhosszúságú négyzetekkel. A széleken van egy kis gond, de ott kicsit erre, kicsit arra csalsz, és végül a négyzetek összege egész jó közelítéssel kiadja a síkidom területét.



Itt ugyanezt csinálhatnánk meg olyan kis négyzet alapú hasábokkal, mint amit a rajzon látsz. Közelítésnek jó lesz. A hasábocska tömege kiszámítható, a távolság megvan. Egy vékony hasáb tulajdonképpen ugyanolyan, mint korábban az a pici golyó, csak magasabb, így a tehetetlenségi nyomatékának kiszámítására a $\Theta = m \cdot l^2$ képlet teljesen jó. A *magasságot*, ami a forgástengellyel párhuzamosan mért hosszt jelenti, azért nem kell számításba venni, mert a magasabb testnek annyival nagyobb a tömege is, és a magasság ezzel már bekerült a képletbe.

Megtudhatjuk így az összes vékony hasáb tehetetlenségi nyomatékát egyenként, ezeket összeadva pedig az egész test tehetetlenségi nyomatékát kapjuk. Ez elég vacakolós dolognak ígérkezik, ezért bizonyos szabályos alakú testekre ezt az összegzést már megcsinálták helyettünk, és most felsorolok közülük ötöt, csak az illendőség kedvéért. Ezt tényleg nem kell megtanulnod, de tudd, hogy hol keresd.



Az első test egy nagyon vékony rúd, a második egy téglatest, a harmadik egy nagyon vékony falú nyitott, üres henger, a negyedik egy tömör henger, az ötödik pedig egy tömör gömb. A testek tömege minden esetben m, az anyaguk homogén sűrűségű.

rúd	$\Theta = \frac{1}{12} m \cdot l^2$	l a rúd hossza
téglatest	$\Theta = \frac{1}{12} m \cdot \left(d_1^{\,2} + d_2^{\,2}\right)$,	$d_{1,2}$ a felső téglalap méretei
üres henger	$\Theta = m \cdot r^2$	r a henger falának (közepes) sugara

tömör henger $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2$ r a henger sugara

gömb $\Theta = \frac{2}{5} m \cdot r^2$ r a gömb sugara

A testek magassága egészen kicsi is lehet, ekkor az üres henger egy vele egyenértékű körvonallá, a tömör henger egy koronggá válik, a képletek ekkor is igazak.

Van egy 12 cm átmérőjű golyónk, a tömege 1,4 kg. Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka? A képlet szerint $\Theta=2/5\cdot m\cdot r^2$, m=1,4 kg, r=0,06 m, Θ=0,002 $kg\cdot m^2$.

A tehetetlenségi nyomaték egy tengely körüli mozgásnál ugyanaz, mint ami a tehetetlen tömeg az egyenes vonalú mozgásnál. Mindkettő egy ellenállás a mozgás megváltoztatásával szemben.

A tehetetlenségi nyomaték attól nyomaték, hogy a testet egy vékony "kar" köti egy forgástengelyhez.

Egy pontszerű tömeg tehetetlenségi nyomatéka a tömegtől és a kar hosszúságától függ, lásd képlet.

Egy egész test tehetetlenségi nyomatéka a pontjainak tehetetlenségi nyomatékaiból adható össze. Nem függ közvetlenül a test magasságától, viszont függ a tengelytől mért kiterjedésétől, azért, mert a tömegpont tehetetlenségi nyomatékára is ez volt igaz. Vagyis a tehetetlenségi nyomaték függ a test alakjától.

Ha például a hengert keskenyebb rúddá formázzuk, és a tengely továbbra is hosszában megy át rajta, akkor a tehetetlenségi nyomatéka csökkenni fog, egy motorral sokkal hamarabb lehet felpörgetni. Ha ellenben széthúzzuk egy olyan valamivé, ami keresztben széles, akkor lassabban lesz felpörgethető.

Kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka mindig nagyobb nullánál.

Az egyenes vonalú mozgások melyik fogalmához hasonlítható a Θ jelentése?

Figyeld meg, hogy a különféle szabályos testekre vonatkozó képletek tulajdonképpen a test anyagának eloszlásáról árulkodnak. Egy üres henger minden pontjának nyomatéka ugyanannyi, ezért az összes nyomaték $m\cdot r^2$, de ha *ugyanezt a tömeget* korong alakú testté formázzuk, akkor a belső és külső távolság átlagolódik, összességében a henger tehetetlenségi nyomatékának felét kapjuk. Nézhetjük úgy is, hogy az anyag egy részét közelebb vittük a tengelyhez, ezért a forgatása könnyebb lett.

Ha egy gömbről azt mondom, hogy a tehetetlenségi nyomatéka 28, akkor **abban benne van már a tömege is**. Azt viszont *nem tudjuk*, hogy ez a tömeg mennyi. Igaz, hogy minden gömbre $\Theta=2/5\cdot m\cdot r^2$, de lehet 28 a tehetetlenségi nyomatéka egy kis méretű, nagy tömegű, és egy nagy méretű, kis tömegű gömbnek is. Sőt, ha nem tudjuk, hogy gömb, akkor a formáját sem tudjuk megtippelni, mert végtelen sok egyéb alakú test is létezik, amelynek szintén 28 a tehetetlenségi nyomatéka.

A képletekhez tartozott az a kitétel is, hogy ezeknek a testeknek homogén sűrűségű az anyaga. Ha egy olyan gömböt veszünk, amelynek például a belső része sűrűbb, mint a külső – a Föld ilyen gömb –, akkor erre a testre a $\Theta=2/5\cdot m\cdot r^2$ képlet nem lesz igaz. Ilyenkor vagy nagyon részletes számítással, vagy méréssel lehet a test tehetetlenségi nyomatékát megtudni. A mérés azt jelenti, hogy a testet ismert nagyságú forgatónyomatékkal kell gyorsítani vagy lassítani, és a szögsebesség változásából lehet a tehetetlenségi nyomaték értékét kiszámolni. Egy bizonyos tengelyre. Ha a tengely iránya vagy helye változik, akkor teljesen más nyomatékot kaphatunk. Ha egy hosszú rudat a hossztengelye körül forgatunk, alig lesz tehetetlenségi nyomatéka, szöget bezáró tengelyekkel pedig egyre nagyobb.

A lényeg az, hogy a tehetetlenségi nyomaték az összetettsége ellenére is egy olyan adat, amely a testről *nem árul el semmi mást*, és két teljesen különböző testnél is lehet ez a szám azonos.

Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka egy 60 dekás méterrúdnak?

A forgómozgás alaptörvénye

A haladó mozgások egyik legfontosabb törvénye a dinamika alaptörvénye (Newton II. törvénye), amely a tehetetlenség törvényével (Newton I. törvénye) egybeépülve alkotja az egyesített mozgástörvényt. Ezeknek megvan a megfelelőjük a körmozgások számára is. A körmozgás egyaránt jelenti a külső forgástengely körüli keringő mozgást és a belső tengely körüli forgó mozgást is, a kettő tulajdonképpen ugyanaz, csak más a tömeg elrendeződése a tengely körül.

Hogy szól a tehetetlenség törvénye? A test megtartja mozgásállapotát, amíg a rá ható erők eredője nulla. Tudod, hogy **körmozgásnál** az erő önmagában nem meghatározó, **a forgatónyomaték az, ami a**

testet forgatja, a kétféle zsineg esete volt rá a példa. A nyugalomban levő forgó test fogalma azt jelenti, hogy a test vagy áll, vagy az adott tengely körül egyenletes szögsebességgel forog. Amikor a test nem forgott, akkor az Erők témakörében azt a helyzetet forgási egyensúlynak hívtuk.

A **forgási tehetetlenség törvénye** a haladó mozgás tehetetlenségéhez hasonlít:

Egy test akkor és csak akkor van *forgási nyugalomban*, ha a testre ható erők forgatónyomatékainak a tengelyre vonatkozatott előjeles összege nulla.

Megjegyzés: Néha a törvényt úgy írják, hogy „Egy forgó test akkor van nyugalomban…” Ezzel az az egyik probléma, hogy a kijelentésnek nem csak a forgó, hanem az éppen nem forgó testre is érvényesnek kell lennie. A forgási nyugalmi helyzet az álló testre is fennáll. A másik pedig az, hogy a forgó test nyugalma úgy is érthető, hogy a test egyenes vonalban, egyenletes sebességgel halad, miközben a tengelye körül forog, például egy pörgetve eldobott labda a súlytalanságban. Csakhogy ez *tényleg* így is van, a tehetetlenség törvénye érvényes a forgó labdára is, és emiatt nem tudhatjuk, hogy a törvénynek ez a szövegezése éppen melyik nyugalmi helyzetről is szól a két egyformán lehetséges közül. Ezért ha a test *forgásának* egyenletességét akarod kiemelni (beleértve a 0 szögsebességet is), akkor inkább forgási nyugalmi helyzetnek vagy nyugalomnak hívd, így egyértelmű lesz.

A haladó mozgás tehetetlenségi törvénye és a forgási tehetetlenség törvénye egy testre egymástól függetlenül teljesülhet.

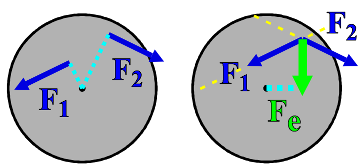
Ha a forgás szögsebességét meg akarjuk változtatni, akkor a testre kiegyenlítetlen forgatónyomatékot kell kifejteni. A kettő kapcsolatának pontos meghatározására a dinamika alaptörvénye mintájára **a forgómozgás alaptörvénye** is megfogalmazható:

Egy adott forgástengelyre vonatkoztatva a testre ható erők eredő forgatónyomatéka egyenlő nagyságú és azonos irányú az általa létrehozott szöggyorsulásnak és a test tehetetlenségi nyomatékának a szorzatával.

A forgómozgás alapegyenletének is hívják a törvény képlettel leírt alakját:

$$M_e = \beta \cdot \Theta$$

ahol $\mathbf{M}_e$ az eredő forgatónyomaték, $\boldsymbol{\beta}$ (béta) a szöggyorsulás és $\boldsymbol{\Theta}$ (théta) a tehetetlenségi nyomaték. Az eredő forgatónyomaték azt jelenti, hogy ha a testre több erő hat, akkor vagy az erők forgatónyomatékainak összegét, vagy az erők összegének forgatónyomatékát kell forgatónyomatékként számításba venni (lásd az ábrát). A kétféle számítás értéke azonos, vagyis bármelyiket választhatod.



Ha az $\mathbf{M}_e$ nulla, akkor a $\boldsymbol{\beta}$ is nulla, *és viszont*, ekkor a forgási tehetetlenség törvényét kapjuk. A $\boldsymbol{\Theta}$ kiterjedt (nem pontszerű) testeknél sosem lehet nulla.

Ha egy test szögsebessége változik, akkor tudjuk, hogy a testre kiegyenlítetlen forgatónyomaték hat. A szögsebesség változása az is, ha egy álló test forogni kezd, vagy egy forgó test megáll.

Egy test milyen adata állandó a forgási nyugalmi helyzetben?

Bármilyen alakú test végezhet **haladó mozgást**, egyenes vonalban, parabolapályán, körpályán vagy bármilyen más útvonalon. A haladó mozgásban érvényes Newton I. és II. törvénye, vagyis a testnek van tehetetlensége, és egy erővel egyenletesen gyorsítható. Bármilyen testhez kiválasztható vagy kialakulhat egy forgástengely, amely körül a test **forgó mozgást** végezhet. A forgási tehetetlenség miatt a forgási sebesség megváltoztatásához forgatónyomatékot kell rá gyakorolni. **A kétféle mozgás egymástól független, egymásra nincsenek hatással**, egy külső erő akár egyszerre változtathatja mindkettőt is. A haladó mozgás törvényei egy már forgó testre is maradéktalanul érvényesek, és egy test haladását nem befolyásolja, ha közben forogni kezd.

Perdület (impulzusmomentum)

Ahogy a tehetetlenségi nyomaték megfeleltethető a tehetetlenségnek, úgy a haladó mozgásoknál tárgyalt IMPULZUSnak is megvan a forgó testekre vonatkozó megfelelője, a **perdület**, régebben használt nevén az **impulzusmomentum**, **impulzusnyomaték** vagy **forgásmennyiség**.

Gyakorlatilag arról van szó, hogy ha már sikerült egy testet a kívánt szögsebességre felpörgetnünk, akkor ebben is van egy lendület – most a köznapi jelentésében használva a szót –, amit zavarmentes (súrlódásmentes) környezetben a végtelenségig meg is tart. Ez, ahogy sejthető, szorosan kapcsolódik a test tehetetlenségi nyomatékához és forgási sebességéhez, ahogy az impulzus kapcsolódik a tömeghez és a haladási sebességhez. A **perdület** kiszámítása a következő:

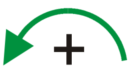
$$\boxed{N = \Theta \cdot \omega}$$

ahol $\mathbf{N}$ a perdület, $\boldsymbol{\Theta}$ a test tehetetlenségi nyomatéka, $\boldsymbol{\omega}$ a forgás szögsebessége. A mértékegysége:

$$[N] = \frac{kg \cdot m^2}{s} = N \cdot m \cdot s$$

A mértékegység jobb oldali változatát (newtonméter-szekundum) könnyebb megjegyezni, ha összehasonlítjuk a perdületet az impulzussal. Haladó mozgások esetében a testet egy erő gyorsítja, amelynek mértékegysége **N**. Ha az erő adott ideig hat a testre, akkor abban létrejön egy mozgásmennyiség, egy impulzus, a mértékegysége **Ns**. Körmozgásnál a testet egy forgatónyomaték gyorsítja, amelynek mértékegysége **Nm**. Ha a forgatónyomaték adott ideig hat a testre, akkor abban létrejön egy forgásmennyiség, egy perdület, a mértékegysége **Nms**.

Én bizony össze szoktam keverni a mértékegységeket. Csinálhatod te is úgy, ahogy én: tudd pontosan a képletet, és a mértékegység abból mindig előállítható, lásd még a könyv végén.



A perdület *irányított* mennyiség, egy adott tengely körül kétféle iránya lehet, a forgatónyomatékkal összhangban: pozitív (balra forgó) és negatív (jobbra forgó). A forgástengelynek azt a végét nevezzük "északinak", amely ezen a kis rajzon a monitorból kifelé, feléd mutatna. Ha a jobb kezedet ökölbe zárva a hüvelykujjadat kinyújtod, akkor ha a többi ujjad irányát vesszük pozitívnak, akkor a hüvelykujjad mutat a tengely északi végének irányába. Ha a forgásirány az ellenkezőjére változik, akkor az északi irány is vele együtt változik. **Az északi irányt mindig a forgás iránya jelöli ki.**

Folytassuk az impulzus szabályainak átértelmezett felsorolását. A perdület megváltoztatásához a testre valamennyi ideig egyenletesen valamennyi forgatónyomatékot fejtünk ki, ez a **nyomatéklökés**.

$$\boxed{\Delta N = M \cdot \Delta t}$$

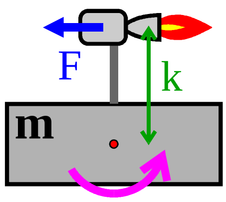
A nyomatéklökés a forgatónyomatéknak és az erőkifejtés idejének a szorzata. Írhatjuk egyszerű $\mathbf{M \cdot t}$ alakban is, csak ne felejtsd el, hogy a $\mathbf{t}$ annak az ideje, ameddig az erő hatott, ez bármennyi lehet. A nyomatéklökés **mértékegysége Nms** (newtonméter-szekundum). Ha a forgatónyomaték nem egyenletes, akkor a folyamatot kisebb szakaszokra bontjuk.

A nyomatéklökés valójában "egy adag perdület", ezért jelölhetjük ΔN-nel, a perdületváltozás jelével, és ezért ugyanaz a mértékegységük. Ha a nyomatéklökés előtt a perdület nulla volt, akkor a *változás* maga az új perdület, ΔN=N. Ilyenkor a két képletből kijön az, hogy

$$\Theta \cdot \omega = M \cdot t$$

Mit jelent az M és hogyan számolhatod ki?

Először kissé talán nehéz elképzelni, milyen mechanikai megoldással *változtathatunk* a forgáson egy forgatónyomaték létrehozásával. A forgatónyomatékot hajdan az emelőkhöz, billentő erőkhöz kötöttük, valami lassú művelethez, és most ezzel kell zökkenőmentesen tovább gyorsítanunk egy már forgó testet. Valójában erre sokféle lehetőség létezik, ilyen például a bicikli egyik irányba szabadon forgó meghajtómechanizmusa is, levegővel fújt turbinalapátok, elektromágneses indukciós tárcsa stb. Ezen az ábrán megnézhetünk egy egyszerű, tiszta módszert. A téglatest a piros ponton áthaladó merőleges tengely körül forog. Bármennyi is a forgási sebessége, ráthetünk még egy lapáttal, ha bekapcsoljuk a kis rakétahajtóművet.



Tegyük fel, hogy a test aktuális perdülete $\mathbf{N}$=1400 Nms. A rakéta ereje $\mathbf{F}$=30 N, a $\mathbf{k}$ nyomatékkar hossza 0,4 m. Mennyivel nő a test perdülete, ha a hajtóművet $\mathbf{t}$=5 s hosszan járatjuk? A forgatónyomaték $\mathbf{M}$=$\mathbf{F \cdot k}$=12 Nm, a nyomatéklökés $\mathbf{\Delta N}$=$\mathbf{M \cdot t}$=12·5=60 Nms. Az öt másodperc végeztével a test perdülete 1400+60=1460 Nms. Ha a hajtóművet újra bekapcsoljuk, változatlan teljesítménnyel, akkor a perdület minden másodpercben 12 Nm-rel nő.

Mekkora lett így a szögsebesség? **…**

Fogalmunk sincs róla, mert az arra vonatkozó képletből csak egyetlen adatot ismerünk. Ha meglenne a test tehetetlenségi nyomatéka, akkor ki tudnánk számolni.

És ha megadom, hogy az **m** tömeg 2,5 kg? **…**

Nem lettünk okosabbak. Hiába tudjuk a tömeget, mert ha az egy gömbbé van gyúrva, akkor könnyebben lesz megpörgethető, mint ha kinyújtjuk egy jókora lappá. Szükségünk van a tehetetlenségi nyomatékra.

Akkor azt mondom, hogy kezdetben a test fordulatszáma 0,9 volt. Folytasd. **…**

Akkor kerülő úton már meg tudjuk oldani. A szögsebesség ω=2π·n, és n=0,9. Ebből ω=5,655 1/s, ennyi volt a szögsebesség, amikor a perdület még 1400 Nms volt. Ebből kiszámolhatjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték (Θ) 247,57 kg·m^2 *volt*. Ha nem változott, akkor a mostani perdületből már megtudjuk, hogy a jelenlegi szögsebesség **ω**=1460/247,57 =5,90 1/s. (Az új fordulatszám 0,939.)

Miért 5,90, és nem csak 5,9? A feladatok eredményeit gyakran 2 tizedesjegy pontossággal kérik tőled. Nem *legfeljebb* 2, hanem 2. Akkor bizony tessék kiírni a két tizedesjegyet. Egyébként az "5,90" azt jelenti, hogy az érték 5,895 és 5,905 közötti. Ha csak "5,9" van írva, az egy 5,85 és 5,95 közötti számot jelent, tízszer nagyobb eltérést is megengedve. Ha tudjuk, hogy a számítás eredménye 5,8972182 lett, akkor nincs értelme ekkora bizonytalanságban hagyni azt, aki az eredményedet elolvassa.

"Ha nem változott." Miért, a tehetetlenségi nyomaték változhat?? Bizony, nincs akadálya annak, hogy egy tárgy az alakját *a forgás közben is megváltoztassa*. Ha az átalakulással **megváltozik a test pontjainak elrendeződése** a tengely körül, akkor a pontok tehetetlenségi nyomatékai, és összegük, **a test tehetetlenségi nyomatéka más lesz**. Ha megnézed a korábban mutatott centrifugális szabályzót, annak a működése is arra alapul, hogy a megnövekvő fordulatszámra a tehetetlenségi nyomatékának megnövelésével reagál. A műugró vagy tornász pedig hol összehúzza magát, hol kinyújtja a testét, szintén a tehetetlenségi nyomatékát változtatva, változtatva ezzel a forgása sebességén is, mindjárt meglátod. A test *továbbra is merev test* marad, csak a részeit egymáshoz képest átrendezzük.

Pontosan mi az a fordulatszám? Ellenőrizd a KÖRMOZGÁS fejezetében!

Rakétaforgatású téglánkkal még nem végeztünk. Feltűnt, hogy a forgástengely a téglatest középpontján ment át? *Mi van a rakéta tömegével?*

A példában nem jutott szerephez a tömeg. Mi közvetlenül a tehetetlenségi nyomatékkal számolhattunk. Mi itt a probléma? Ha a rajzon látott rendszer közös tömegközéppontját, centrumát keressük, akkor a rakéta tömegét is számításba kell venni. *Ha feltételezzük*, hogy a téglatest sűrűsége egyenletes, akkor annak a tömegközéppontja a mértani középpontjában van. Van viszont egy rakéta is, saját tömeggel, és ettől a rendszer centruma a mérleghinta-szabály szerint valamennyivel a rakéta felé van eltolódik.

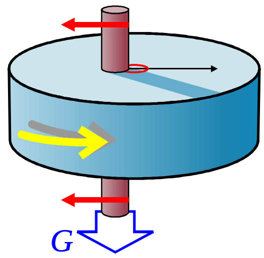
A piros pont nem a centrum helyét, hanem a forgástengely helyét jelöli. De az elhelyezése alapján úgy tűnhet, mintha a mérleghinta-szabályról megfeledkeztünk volna. Viszont most ez sem lenne baj, hiszen a feladatban a centrumnak nincs szerepe. Igazából *nem mondta senki*, hogy a téglatest centruma középen van, csak feltételeztük, mert gimis fizikapéldákban nem szoktak bonyolult helyzeteket alapul venni.

Jó, és ha a centrum nem a piros pontnál, nem a tengelyen van, akkor is mi van? Nos, mi következne közvetlenül ebből? **…**

Az, hogy a centrum körpályát ír le a tengely körül. Egy keringő tömegpont. *És?* **…**

Akkor van egy centrifugális tehetetlensége, vagyis *erő* kell a pályán tartásához. Hol kell ezt az erőt kifejteni? Köss rá a tollad oldalára valamit, tartsd a tollat függőlegesen, és forgasd gyorsan. Érezni fogod az ujjaidban azt az erőt, amit a tengely a "csapágyra" kifejt, és azt is, hogy ez az aszimmetrikus erő az egész rendszerrel együtt forog. A centrifugális erőt a tengely közvetíti az őt tartó csapágyakra, azok pedig létrehozzák a tengelyt a helyén tartó ellenerőt. Tehát a tengely és a csapágyak féloldalasan meg lesznek terhelve. Ha láttál már olyan mosógépet, amelyben egyenetlen súlyeloszlásban volt a ruha, amikor centrifugálni kezdett, akkor lehet fogalmad arról, amikor egy tengely terhelése egyenetlenné válik.

Egy nagy sebességgel forgatott pörgettyű vagy számítógép-merevlemez felől többé-kevésbé halk zúgást hallunk, amelynek a hangmagassága a pörgés sebességével együtt változik. Az a helyzet, hogy a forgó testet szinte lehetetlen tökéletesen kiegyensúlyozni. Olyan ez, mint a labilis egyensúlyi helyzet: elméletben létezik, a gyakorlatban sosem tudjuk teljesen eltalálni. A lemezegység korongjának vagy motorjának a tengelye a leheletnyi *excentrikusság* miatt mégiscsak ide-oda mozog a csapágyában, amely nem tudja tökéletesen mozdulatlanul tartani. A tengely rendkívül apró, de szapora odaütődései állnak össze egy folyamatos hanggá. Minél halkabb ez a hang, annál kisebb a tengely mozgása. A folyamatos oldalerő, netán az erősödő rázkódás hatására a csapágyak erősen kopnak, felmelegszenek, rossz esetben végül "besülhetnek".

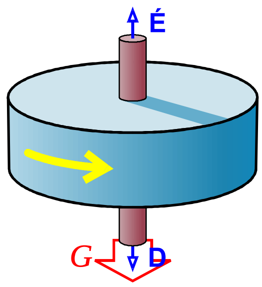


A rajzon egy olyan forgó rendszert látsz, amelynek az excentrikussága igen nagy, és a tengely végeit oldalirányú erők tartják vissza. *Forgatónyomaték nem hat rá*, mert a jelenlévő erők a tengelyen mennek át, ezért a forgás sebessége állandó marad, a forgási tehetetlenség törvénye szerint.

Tudjuk, hogy egy nagyobb napkitörés, pontosabban koronakidobódás során a bolygónkat elérő ritka plazmafelhő többféle okból is súlyos károkat képes okozni a nagy kiterjedésű elektromos hálózatokban, főleg az azokat tápláló generátorokban. Mivel a generátorok pótlása szerencsés esetben is igénybe vesz egy-két hetet, és addig legfeljebb az elektromos fogkefénkkel tudjuk meghajtani a hűtőszekrény motorját meg a víztorony szivattyúját – a teljes kommunikációs hálózatunk összedőlését most ne számítsuk a kényelmetlenségek közé –, érthetően gyakori a kérdés, hogy miért okozhat ekkora bajt a távvezetékekben ilyenkor fellépő viszonylag kis áramingadozás.

A magyarázat nem az ingadozás erejében rejlik, hanem magában az ingadozásban, ami a generátorokban aszimmetrikus elektromágneses térerőváltozásokat gerjeszt. A kiegyensúlyozott, nagy sebességgel forgó, hatalmas tömegű generátormagra ezek a kis ritmikus lökdösések úgy hatnak, mint amikor a mosógépben félrecsúszva gyűlik össze a vizes ruha. Az ebből származó rezgés tönkreteheti a csapágyazást, akadályozva a szabad forgást, vagy csak simán széttépi az egész miskulanciát. Csak egy kis excentrikus terhelés kell hozzá. Ezért fontos a Napot figyelő jelzőrendszer fenntartása, amely segíti a generátorok és más érzékeny berendezések időben történő leválasztását, leállítását.

A generátormag tömege legyen csak 5 t, a fordulatszám 50/s. Mekkora visszatartó centripetális oldalerő hat a tengelyekre és a csapágyakra, ha a tömegközéppont *1 milliméterrel* elmozdul a forgástengelyről? **…** A képlet $F_{cp}=m\cdot r\cdot\omega^2$, $\omega=2\pi\cdot n$, $r=0{,}001$ m, ezekből $F_{cp}=493$ ezer newton.



Ha a rendszer tömegközéppontja a forgástengelyre esik, akkor a forgás erőmentes. Ilyenkor a tengely terhelése megegyezik álló és forgó helyzetben, a rendszer kiegyensúlyozott. Az ábrán levő pörgettyű tengelye csak a súlyt (G) tartja, ami független a forgástól.

A rakétahajtású téglatestről a forgás és a forgatónyomaték kapcsolatának az a része is jusson eszedbe, amikor a rendszerre kifejtett forgatónyomaték a forgással *ellentétes* irányú. Ha a rakéta a másik irányba állna, akkor gyorsítás helyett lassítaná a forgást. A forgásnak, a szögsebességnek, szöggyorsulásnak, forgatónyomatéknak, perdületnek mindig van iránya is, ezért matematikailag a gyorsulás és lassulás összesen egy előjelben különbözik, minden eddigi képletünk mindkét esetben érvényes.

Mit jelent, ha egy test forgása excentrikus? És mit okoz?

A forgatónyomaték és a szögsebesség változása közötti összefüggést mondja ki a forgómozgás alaptörvénye. A perdület definíciója szintén a szögsebességre alapul. A nyomatéklökés definíciójából tudjuk, hogy a perdületet forgatónyomatékkal lehet megváltoztatni. Ezekhez kapcsolódik a **perdülettétel**:

Egy test perdületét <u>külső</u> erők forgatónyomatékai és csakis azok változtathatják meg. A forgatónyomatékok eredője egyenlő a perdület időegységenkénti megváltozásával.

A második, kissé rejtelmes mondat valójában a tételt kifejező képletet írja le:

$$M_e = \sum_i M_i = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

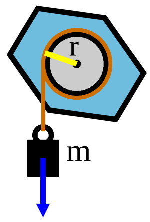
ahol $\mathbf{M_e}$ az eredő forgatónyomaték, amely a testre ható összes forgatónyomaték előjeles összege, $\mathbf{\Delta N}$ a perdület változása, $\mathbf{\Delta t}$ a közben eltelt idő. A képlet szerint **ha a perdületváltozás értékét elosztod azzal az idővel, amennyi alatt az lezajlott, akkor megkapod, hogy mekkora forgatónyomaték okozta**.

Ha megnézed a nyomatéklökés képletét, látod, hogy a két képlet lényegében ugyanaz, tehát azt is mondhatnánk, hogy **a perdület megváltoztatása nyomatéklökésekkel és csakis azokkal lehetséges**. A perdület nyomatéklökésekből rakódik össze. A nyomatéklökés pedig nem más, mint egy adott ideig a rendszerre kifejtett forgatónyomaték.

Fontos, hogy a tétel kiemeli a forgatónyomatékról, hogy azt <u>külső erőnek</u> kell létrehoznia, ahogy ez nagyon is lényeges kitétel volt az impulzusváltozással kapcsolatban is.

Kiegyenlített forgatónyomatékoknál azok eredője 0, tehát ilyenkor a perdület nem változik.

A perdület megsemmisíthetetlen. Részben vagy egészben átadódhat más testeknek, de eltűnni nem fog. Ehhez kapcsolódik majd a következő fejezet, a perdület megmaradása.



Foglaljuk össze a tanultakat egy hosszú példafeladatban. A kék test áll. A nehezéket elengedjük, húzni kezdi a kötelet, a test forogni kezd. A nehezék tömege m=4 kg, a kötéldob sugara r=0,2m. 3 másodperc elteltével a test forgási sebessége 0,6 radián/s. Ez kerületi vagy szögsebesség? **…**

A kerületi sebesség a kerületre, az ívhosszra alapul, tehát lenne benne méter. A szögsebesség szög per idő, a szög mértékegysége radián, tehát szögsebességről van szó, ω=0,6. **Mennyi a test fordulatszáma? …**

ω=2π·n, vagyis n=ω/2π=**0,0955 fordulat/s**. Mennyi ideig tart egy fordulat? T=1/n=**10,47 s**. Elég lassú, de ez nem érdekes. **Mennyi a test tehetetlenségi nyomatéka?**

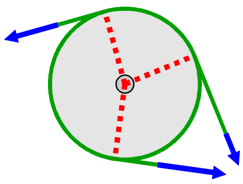
Hát pontosan ez az, amit nem lehet kitalálni csak úgy. A test pontos geometriai adataira lenne szükség, valamint az anyagának a sűrűségére, hogy a testből vett kis hasábok tehetetlenségi nyomatékait kiszámíthassuk és valamilyen módszerrel összeadogathassuk. Viszont most mégis *eleget tudunk* ahhoz, hogy megmondjuk. Szóval, mennyi a test tehetetlenségi nyomatéka?

Az eljárás a szokásos: előkapod a forgómozgásról szóló képleteket, és megnézed, hogy van-e közöttük olyan, amelyben már csak a Θ az ismeretlen. Rossz hírem van: most nincs ilyen. Itt most több képlet összerakása kell, és fejtörés. Megoldható, dolgoztasd meg az agyadat. **… …**

Komolyan remélem, hogy a fejtörés legalább részleges sikert hozott. A dolognak ez a része az, amit a feladatok megoldásával begyakorolnod kell.

$M = F \cdot k \quad \beta = \Delta\omega / \Delta t \quad M = \beta \cdot \Theta$, ahol… ezt már te is ismered. Tudod folytatni? **…**

Az értékek kiderítésének van egy menete, amelyben az ismert adatokból kiszámítunk egy ismeretlent, annak birtokában egy újabbat, egészen addig, amíg meg nem kapjuk, amit keresünk. A láncolat eleje most talán nem olyan nyilvánvaló, de az első két képletben csak egy-egy adat ismeretlen, amelyek a harmadik képletben lesznek felhasználhatók. Csináld. **…**

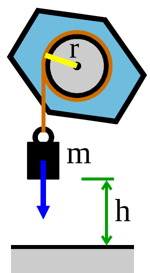


Az M=F·k képletben a forgatónyomaték ahhoz az erőhöz tartozik, amely a test forgását létrehozza, ez a kötélre akasztott nehezék súlya. Esetleg meglep, hogy ezt az erőt nem az egész test legkülső peremén fejtjük ki rá, de ez nem is szükséges. A forgató erő F=m·g=40 N. Kérdéses a k erőkar. 1) A kötél a dob egyik érintőjével esik egybe, 2) a kötélerő a kötél vonalával esik egybe, 3) az erőkar mindig merőleges az erő vonalára, 4) az érintőre a kör sugara a merőleges, tehát: az erőkar az r sugár, itt 0,2 m. Megvan a forgatónyomaték: M=8 Nm.

A β szöggyorsuláshoz a szögsebesség változása kell. **…** A test álló helyzetből indult, 0,6-ig jutott, akkor a Δω=0,6, a közben eltelt idő 3 s, azaz β=0,6/3=0,2 radián/s^2. Fejezd be te! **…**

A harmadik képlet alapján 8=0,2·Θ, azaz a tehetetlenségi nyomaték **40 kgm^2**.

A nehezék végül a földre ér. Mi történik a testtel ezután? …



A nehezék kötelet húzó ereje és ezzel együtt a forgatónyomatéka megszűnik. Más forgatónyomaték a testre nem hat, így tehát a forgási tehetetlenség törvénye szerint a test forgási sebessége állandósul, nem változik tovább. *Nem áll le*, mert a tengelyre ható súrlódási erőt szokás szerint nem vesszük figyelembe.

A tengely súrlódása milyen formában avatkozna be a mozgásba? A tengely is mindig egy rúd, legalább ott, ahol a felfüggesztése vagy csapágya van. A súrlódás ennek a rúdnak a forgását lassítja, és szintén érintőirányú erőt fejt ki a tengely felszínére, forgatónyomatékot, bármennyi is a tengely átmérője. Ez a súrlódás is csak egy felület elcsúszása egy másik felületen, nincs benne semmi új. Egy forgástengely súrlódását általában csökkenteni próbáljuk, a felületek közé bejuttatott csúszós anyagokkal.

A teherkocsik kerekeit egy vasúti munkás indulás előtt végigkopogtatja. Részben repedés okozta hamis hangot keres, részben a tengelyek végein levő zsírzóházakat ellenőrzi. Ha valamelyikből kifogy a kenőzsír, akkor útközben a súrlódás annyira felhevítheti a tengelyt, hogy a kocsi is kigyullad.

A tűzgyújtó pálca működése erre a felhevülésre alapul, annak kimondottan ártana egy kis kenőzsír.

A test h magasságból indult, és h=0,9 m. Mennyi idő alatt ér le a nehezék a földre? Ez egy kicsit fogósabb kérdés, de valójában nem is olyan komplikált. Tervezd meg a megoldást. **…** **…**

Alakítsuk át a kérdést: mennyi idő alatt tekeredik le a dobról h hosszúságú kötél? Egyszerűbben is mondhatjuk ugyanezt: mennyi idő alatt fordul el a test h *ívhosszúságot*? (Értsd meg a rajzon!)

Remélem, hogy megszólal benned a figyelmeztető hang, hogy ívhosszúságot csak egy köríven lehet lemérni, olyanon, amelynek ismerjük a sugarát. És mi a másik szükséges adat? **…**

A forgómozgás képletei az ívhossz helyett a szöggel, szögsebességgel, szöggyorsulással foglalkoznak, ezért az ívhosszúságot hasznos lesz a hozzá tartozó elfordulási szögre váltani, ez a φ. A megoldáshoz első része lényegében ennyi: mekkora középponti (elfordulási) szög tartozik a kötéldob 0,9 m kerületi hosszú elfordulásához? **…**

Van egy r=0,2 m sugarú körünk, amelynek a kerülete r·2π=1,257 m. Ez felel meg a 2π középponti szögnek (radiánban), a 0,9 m ívhossz alapján a szükséges elfordulás szöge 2π·0,9/1,257=4,50 radián. Fölösleges fokra váltanunk, mert újra radiánban kell majd használnunk, de kb. 258°.

Ezek után fogalmazd is meg magadnak a feladatban feltett kérdést úgy, hogy a már kiderített adatokra hivatkozol! Tehát most mit keresünk? **…**

Körülbelül ezt kellett kitalálnod: Mennyi idő alatt fordul el a test 4,50 radiánnyit, ha a forgatást az m tömegű nehezék súlya hozza létre, álló helyzetből?

Az időt nagy leleményesen elnevezzük t-nek, φ=4,50, F=m·g=40 N, r=0,2 m.

Megjegyzés: Lehet, hogy a feladatban két tizedesjegy pontosságot kell használnod, de ezt a gyakorlatban elég fölöslegessé teszi, ha a g értékét szabad ekkora pontatlansággal megadni.

$M = F \cdot k \quad \Delta\omega = \Delta\varphi / \Delta t \quad \beta = \Delta\omega / \Delta t \quad M = \beta \cdot \Theta$. A képletekben már csak a t értéke ismeretlen, szóval ezt illik simán két vállra fektetni. Végezd el a behelyettesítéseket! **…**

M=F·k=F·r=8 Nm, ω=4,5/t, β=4,5/t^2, Θ=40 kgm^2, ezt még az előbb számoltuk ki. Fejezd be! **…**

M=β·Θ, 8=4,5/t^2·40. Ebből t=**4,74 s**, ennyi idő alatt ér le a nehezék a földre. *Csináld meg még egyszer, egyedül, üres lapra!* A tehetetlenségi nyomaték 40 kgm^2, a nehezék magassága 0,9 m, tömege 4 kg, a forgódob sugara 0,2 m, a test álló helyzetből kezd forogni.

Megér pár szót újra az, hogy **a delta jelek hogyan, miért tűnnek el**. Ez visszatérő probléma, és a tanárok sem erőltetik, a békesség kedvéért, de annyira nem veszélyes. Például a **Δω** a szögsebesség változását jelenti. Ez egy ilyen példában úgy értendő, hogy választunk két pillanatot, és megnézzük a szögsebességet mindkét pillanatban. Amennyi közöttük az eltérés, annyi a szögsebesség változása. Előjelhelyesen, mert ha a szögsebesség csökkent, akkor a **Δω** negatív szám. A **Δφ** ez elfordulási szög változása a két pillanat között, a **Δf** a frekvencia változása, **ΔQ** az elektrosztatikus töltés változása, szóval **Δvalami** mindig a 'valami' értékében a két kiválasztott pillanat közötti időszakban bekövetkezett változás, a két megfigyelt érték különbsége.

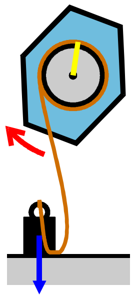
A **Δt** pedig "az időben bekövetkezett változás". Ez úgy értendő, hogy ketyeg az óra, az első pillanatban ránézel és megjegyzed, aztán a második pillanatban is, és a kettő különbsége a **Δt**, annak az időszakasznak a hossza, amely alatt a szóban forgó jelenséget megfigyelted, megmérted.

Vegyük például ezt: "*A forgatónyomatékok eredője egyenlő a perdület időegységenkénti megváltozásával.*" Az időegységenkénti megváltozás azt jelenti, hogy ha a változás 15, és ez 3 időegység alatt történt, akkor az 1 időegységre jutó változás 5. Az általánosító "időegység" szót a korrektség miatt használják, de ha te az összes kapott adatot mindig átszámítod az SI által előírt mértékegységekbe, akkor az "időegységenkénti" helyére nyugodtan beteheted azt, hogy "másodpercenkénti", és így kézzelfoghatóbb lesz a téma.

És a **Δ** jelek hogyan vehetők ki a számításból? Tudjuk például, hogy a gyorsulás a sebesség időegységenkénti megváltozása, **a=Δv/Δt**. Két különböző pillanatban nézzük meg a **v** értékeit. Ha először 32, aztán 38, akkor a **Δv** értéke 6, és ezt osztjuk a közben eltelt idővel. Ha csak azt írjuk le képletként, hogy **a=v/t**, akkor ez azt jelenti, hogy 38 osztva az akkori pontos idővel, aminek persze nincs semmi értelme.

De ha az **a=v/t** képletet úgy értelmezed, hogy a sebesség *kezdeti* értéke nulla volt, vagy hogy a **v** már csak a sebesség*változást* jelenti, akkor megengedhető, hogy az egyszerűség kedvéért így írd és így tanuld meg. A kényelmesség miatt én is így szoktam csinálni, és ebben a könyvben sem koptatom fölöslegesen a delta billentyűt. De ne felejtsd el mindig megérteni, hogy pontosan mit is kell kiszámolnod.

Az előző feladatokban használt nehezék a földön nyugszik. Valamilyen módon megpörgetjük a kék testet, az ábra szerint, és magára hagyjuk. Mi fog történni? …



A kérdés nem nehéz. A "magára hagyjuk" azt jelenti, hogy nem fejtünk ki rá erőt, nem gyorsítjuk, nem fékezzük tovább. A test egyenletesen forog, majd a kötél megfeszül. Onnantól a test a nehezéket emeli, ahogy azt például a HENGERKERÉK fejezetben is kitárgyaltuk. És a nehezék súlya állandó forgatónyomatékkal lassítja a test forgását, ami egyszer végül 0-ra csökken, a test megáll. És? Természetesen a válasz itt nem ér véget, hiszen ekkor a nehezék súlya pozitív irányban kezdi pörgetni a testet, az előző feladat pontosan ezt a helyzetet írta le. Amikor a nehezék újra a földre ér, a test forgási sebességének növekedése véget ér, és a test egyenletes sebességgel forog tovább. Ha a kötél nincs a dobhoz rögzítve, akkor végül leszalad az egész. Ha rögzítve van, akkor a felcsévélés–leereszkedés az ellenkező irányban megismétlődik, és így tovább. Ha a mozgást lassító erőket figyelmen kívül hagyjuk, akkor ez a fel–le játék vég nélkül folytatódik.

A képen látható helyzetben ω=–7,5/s, Θ=25 kgm^2, m=5 kg, r=0,2 m, a kötélhossz szükség szerinti. Mennyi a nehezék elemelkedése és leérkezése közötti időkülönbség? Ez a feladat könnyebb, mint az előző. Oldd meg. Az eredmény 37,5 s.

A forgásba hozott testre jellemző irányított mennyiség a perdület (N), Θ·ω, mértékegysége Nms.

A nyomatéklökés egy adott ideig a forgó testre gyakorolt forgatónyomaték, M·t.

A perdülettétel szerint a perdületet csak külső erők forgatónyomatékai változtathatják meg, összeadódó nyomatéklökések alakjában. A perdületváltozást a test tehetetlenségi nyomatéka nehezíti.

Lendkerék, motornyomaték

A lendkerék vagy lendítőkerék egy olyan, nagy tehetetlenségi nyomatékú test, amely mechanikus szerkezetekben az összegyűjtött forgási energia tárolására és visszaadására szolgál. Rendszerint henger, korong, kerék alakú, mert a mérethez viszonyítva ennek a formának van a legnagyobb tehetetlenségi nyomatéka.

A "lendkerekes autó" fogalma az 1950-70-es években jól ismert volt. A gyerek ezt a kisautót néhányszor jó erősen megtolta a padlón, csak előrefelé, újra meg újra felemelve. Az autó kerekei felpörgettek egy vaskorongot, a lendkereket, ezután az autót el lehetett engedni, és innentől **a lendkerék forgatta a kerekeket, hajtotta az autót**, amely magától gurult, tovább, mint ha csak meglöknénk. Sima kövön egy húszcentis autóbusz 8-10 métert is megtett, mire a súrlódás felemésztette a lendkerék teljes perdületét.

Az elektromos, aztán elektronikus játékok időszaka előtt ez volt az általános, mellesleg elég strapabíró és teljesen energiatakarékos megoldás, járművek mellett másféle játékokban is. Az elve egyszerű: a valamilyen mechanikus módon felpörgetett lendkerék forgatónyomatékot tud kifejteni egy fogaskerékre, amely áttételesen a jármű kerekét megforgatja. Persze hiába voltak ezek a játékok könnyű anyagokból, elsősorban vékony vaslemezből vagy műanyagból, a mozgást akadályozó erők viszonylag nagy ellennyomatékot gyakoroltak a lendkerékre, ezért **a perdülete elég hamar nullára csökkent**. De néhány lendületvétellel újra feltölthető a kocsi energiával, aztán hajrá.

A lendkerék igazi autóbuszban való felhasználására komoly kísérletek is folytak. Az ilyen buszt is motor hajtaná, de a fékezés úgy történne, hogy a busz a lendületének egy részét a lendkerék forgási sebességének növelésére fordítva vesztené el. Amikor újra elindul, a gyorsítását a lendkerék végezné, és a motorral csak kiegészíteni kellene az így kapott hajtóerőt. Többféle technikai nehézség miatt az ötlet végül elhalt.

Az egyik komoly nehézséget a pörgettyű vagy giroszkóp jellegzetes vonása jelenti: a pörgettyű a perdületén kívül a forgási síkját is megtartja. Ha a tengelyét elfordítani próbáljuk, akkor egy keresztirányú erővel reagál. Egy busz meghajtására már alkalmas méretű és perdületű lendkerék pörgettyűként viselkedve egy szűk kanyarban fel tudná borítani a buszt.

Ha viszont ügyelünk arra, hogy a pörgettyűre minimális kitérítő erővel hassunk, akkor a forgástengely iránya hosszú időn át állandó marad. Egy felpörgetett pörgettyűt az asztalról egy papírlappal is felemelhetsz anélkül, hogy az felbillenne. A megpörgetett kosárlabdát az ujjadon egyensúlyozva szintén kihasználod ezt a hatást. A képen látható három tengelyes kardánfelfüggesztés a pörgettyűt minden kényszertől megszabadítja, és hiába forgatjuk el a két kis kart fogva a szerkezetet *bármilyen* irányban, a pörgettyű forgástengelyének térbeli iránya nem változik. Műholdak stabilizáló-rendszerében, repülőgépek, hajók navigációs műszereiben folyamatosan forgásban tartott pörgettyűk segítségével tárolják a beállított alapirányokat.

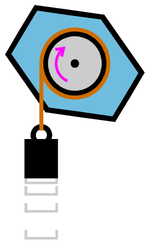
A forgó lendkerék melyik tulajdonságát hasznosítjuk a kisautóban? Magyarázd is meg.

A lendkerekes autót a felpörgetett lendkerék ereje mozgatja. Azt írtam az előbb, hogy "a súrlódás fel-emésztette a lendkerék teljes perdületét." Miképp történik ez?

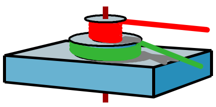
A lendkerék a hozzá kapcsolódó fogaskerék-áttétellel mozgatja az autó kerekét. Forgatónyomatékot fejt ki a vele közvetlenül érintkező fogaskerékre. *Mennyi időre elegendő* a benne indításkor összegyűjtött perdület? Akár a nyomatéklökés képletéből, akár a perdülettételből megkapjuk a következő egyenletet:

$$\boxed{N = M \cdot t}$$

Itt a szó szerinti válasz a kérdésünkre. Hogy a felvett összes perdület mennyi időre elég, az attól függ, hogy mekkora forgatónyomaték alakjában fogyasztjuk el. A képlet nem csak azt fejezi ki, hogy ha valamennyi ideig egy adott forgatónyomatékkal forgatunk egy kereket, akkor mennyi perdületet hoztunk létre. A dolog visszafelé is működik. A meglevő perdületet erő, munkavégzés alakjában hasznosítani tudjuk. De hogyan vezetjük el az erőt a lendkerékről?



Az előbb láttunk rá egy alapvető megoldást, amikor a forgó test egy kötéldobra tekeredő kötéllel leküzdötte egy másik test súlyerejét és felemelte. Végső soron minden módszer arra alapul, hogy a forgó tengelyen van egy kerékféle, amely szintén forog. A kerék pereme érintőirányban egy erőt fejt ki valamire, például a feltekeredő kötélre, egy végtelenített szíj, lánc egyik ágára, vagy egy fogaskerékre, dörzskerékre stb. Az a lényeg, hogy a kerék által átadott erő pillanatnyi vektorának mindig van egy merőleges távolsága a tengelytől, ez az erőkar, amely nem minden erőátviteli módszernél állandó, de a fentieknél az, és egyenlő a kerék vagy dob sugarával. Erőször erőkar: forgatónyomaték.



Tudhatod, hogy ha el akarsz fordítani egy testet, akkor annál könnyebben megy, minél nagyobb erőkar végén tudod az erőt kifejteni. Az EMELŐK alapelve pedig az, hogy a teherkarral annál nagyobb erőt tudsz kifejteni, minél nagyobb a kar hossza. Az erő nagysága és a forgatónyomaték nagysága mindig összefügg, oda–vissza.

A forgómozgást mindig csak forgatónyomatékként tudjuk erővé alakítani.

Ha a lendkerékről nagy forgatónyomatékkal, nagy erőkarral vesszük át az erőt, akkor a perdület rövidebb időre elég, hamarabb alatt csökken nullára, az **M·t** összefüggés szerint.

A forgatónyomatékban hol mérjük az erőkart? (Kereshetsz választ másik fejezetben is.)

A forgómozgások alapegyenlete szerint a forgatónyomaték alkalmas a tehetetlenségi nyomatékkal szemben egy forgás gyorsítására, lassítására. De **a forgatónyomatékkal más erők és nyomatékok is szembekerülhetnek**, amelyek származhatnak a súrlódásból, valamilyen alakváltozásból, közegellen-állásból, bármiből, ami erőt igényel. Egy autó kerekét is egy forgatónyomatékkal forgatja meg a motor, és nem a kerék tehetetlenségi nyomatéka, hanem a gördülő-ellenállása és más ellenerők azok, amelyek a motor erejével szemben fellépnek.

Egy szerkezet mozgatásához forgómozgásból felvett erő sem csak a forgó lendkerék tehetetlenségi nyomatékából és perdületéből származhat, mert forgó mozgást produkál egy motor is. A motor ereje közvetlenül nem fejezhető ki, hiszen mekkora ereje van egy vékony, forgó tengelynek? **A motorok erejét is csak nyomatékként tudjuk erővé alakítani.** Később látni fogod, hogy a motor teljesítménye azt árulja el, hogy az erőt milyen gyorsan vehetjük át, de magát az erőt a motor *nyomatéka* fejezi ki. Hogy aztán az az erő miféle mechanizmussal lesz elvezetve arra a helyre, ahol elhasználódik, például az autó kerekeihez, egy csörlőhöz vagy a daru kötélzetéhez, már külön erőtani kérdés.

Egy kocsi tömege 700 kg. Tegyük fel, hogy a benne levő motor egyenletesen 250 Nm nyomatékot ad le. (A valóságban a nyomaték több dologtól függően is változik.) **A motor a tengelyre szerelt, 26 cm átmérőjű keréken futó ékszíjjal adja le az erejét. Ha eltekintünk minden erőveszteségről, akkor mennyi idő alatt gyorsul fel a kocsi 100 km/h sebességre?**

Egy ismert tömegű autót egyenes vonalban gyorsítunk fel egy megadott sebességre egy erő segítségével. Ha netán még mindig nem ismernéd fel ebben a dinamika alaptörvényét… Ne is képzeljünk el ilyet, úgysem fordulhat elő, igaz? A $v=a{\cdot}t$ képletből t a kérdéses, az a pedig az $F=m{\cdot}a$ képletből szerzendő meg, ehhez kell még az F. Viszont már az öcséd is tudja, hogy $M=F{\cdot}k$, tehát együtt van minden, légy szíves levezetni. **…**

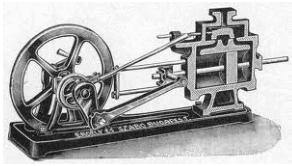
M=250 Nm, k=0,13 m (26 centi az átmérő!), M=F·k, vagyis F=1923 N.
m=700 kg, F=m·a, vagyis a=2,75 m/s^2.
v=100 km/h=27,8 m/s, v=a·t, vagyis **t=10,1 s**.

A motor teljesítménye, sebessége és a nyomatéka gyakran nincs arányban. Lehet, hogy egy traktor csak 50-nel tud hasítani, viszont egy kötélen kihúz a sárból egy egész Lamborghini flottát. A motorja és a masszív erőátviteli rendszere nem tud nagy sebességgel dolgozni, ellenben a motor bivalyerős, ezért nagy nyomaték, nagy erő vehető át tőle.

Megirigyli ezt a tököstóni, és úgy dönt, hogy felspécizi a Lamborghinijét, milyen pöpecz dolog lesz kihúzni a sárból a szomszéd nagyarc Hummerjét. Feltesz a motorfőtengelyre egy nagyobb ékszíj-tárcsát, aztán csodálkozik, amikor a motor prüszköl, vinnyog, csuklik, csak nem húz. Merthogy a gyárilag megadott nyomaték a motor képességeit jellemzi, és ha túlterheljük, akkor el is törhet valami. Ha növeljük az erőkart, akkor ugyanabból a (maximális) nyomatékból kisebb erőt kapunk, M=F·k.

Ha egy forgó lendkerék lelassul és megáll, akkor az minek a következménye lehet?

A lendkerék és a motor kombinálható is. A játékautó lendkerekének perdülete folyamatosan fogyott, elhasználódott. De a lendkereket valamilyen **motorral állandó fordulatszámon is lehet tartani**. Ha az azt érő egyenetlen fékező erőhatások viszonylag kicsik, akkor a motor hamar pótolja a forgási sebesség csökkenését, és ehhez **nem kell erős motor**, ez benne a jó. Erre alapul a "bakelit"* lemezek lejátszója is, amiben a forgó tányért viszonylag nagy tömegűre készítik. Ugyan időbe telik, amíg a gyenge motor felpörgeti a percenként 33 1/3 fordulatszámra, de ezek után ha egy pillanatra valami apró egyenetlenség miatt a lemez lelassulna, a tányér nagy tehetetlenségi nyomatéka miatt az a kis erőlökés észrevétlen marad, a sebesség nem csökken, a hang nem kezd el "nyávogni".



Ez a haszna a nagy mechanikus gépekben is a lendkerék szerkezetbe iktatásának. Egy gőzgép vagy robbanómotor az erőt nem egyenletesen, hanem *periodikus lüktetéssel adja le*. Ahol ez kényelmetlenséget okoz, ott a mechanizmusba egy lendkereket építenek, és a motor az erejével mindig annak a perdületét táplálja. A kerék tehetetlenségi nyomatéka nagy, a motortól kapott erő (forgatónyomaték) csak kisebb ingadozást okoz a forgásában, és a munkavégző erőt a motor helyett a kerékről vezetik tovább, **egyenletesebb meghajtást kapva**. Az emberi hajtású futógépek, sígépek alkatrészei között is ott van egy lendkerék, de a hosszútávú pályakerékpárok egyik kereke is viszonylag nehéz. Időbe telik vele felgyorsulni, de onnantól könnyebb a sebesség tartása pillanatnyi kihagyás esetén, és a pedál forgatásakor kifejthető nagyon változó erő ellenére is.

Dugattyús motoroknál vagy hajtórudas gépeknél olyan helyzet is előfordul, hogy a motor véletlenül épp egy holtponti helyzetben áll meg. Létrejön egy olyan egyensúlyi helyzet, amikor az erőhöz majdnem pontosan 0 hosszúságú erőkar tartozik, a puszta erő nem is tudja a szerkezetet ebből kimozdítani. A megelőzésére a legegyszerűbb az aszimmetrikus súlyelosztású lendkerék. Ha egy gőzmozdony kerekét oldalról megnézed, jól látszik rajta egy megvastagított, súlyosabbra kialakított rész. Amikor menet közben a dugattyú a holtponton van, a kerék saját lendületéből kicsit tovább forog, áttolva a dugattyút is a holtponti helyzetén, amely ezután ismét forgatóerőt tud rá kifejteni.

A lendkerék gépek egy nagy tehetetlenségi nyomatékú alkatrésze, amely felpörgetve nagy perdületet tud tárolni.

A forgó lendkerék mechanikus áttételeken át erőt tud átadni, amihez a perdületét használja fel.

A perdület mindig csak a lendkerék által kifejtett forgatónyomatékként használható fel. A nyomatékból kapott erő az F·k szerint az erőátadás helyén érvényes erőkartól függ.

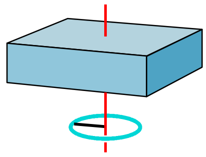
A perdületet minél nagyobb nyomatékként vesszük át, annál rövidebb idő alatt áll le a lendkerék, az N=M·t összefüggés szerint. A perdületet nyomatéklökésekkel lehet a lendkerékbe tölteni, és a perdület azonos végösszegű nyomatéklökésekként kapható vissza.

Nyomatékot nem csak egy lendkerék perdülete, hanem bármilyen forgó mozgás létre tud hozni. A forgó mozgásból erőt mindig csak nyomatékként lehet kinyerni. A motorokban forgómozgás jön létre.

A lendkerék másik előnye, hogy a perdülete folyamatosan kiegészíthető, növelhető, ezzel szakaszosan érkező gépi erő tehető egyenletesebbé.

* Nem bakelit, vinil. A bakelit nem is alkalmas ilyen leheletfinom részletek megőrzésére, hajlításkor pedig szilánkosan széttörik. A közös tulajdonságuk összesen az, hogy mindkettő fekete.

Tömegközépkör



Az egyenes vonalú mozgásnál az egyszerűség kedvéért úgy vettük, hogy a tehetetlenség a test *tömegközéppont*jában hat. Ennek analógiájára bevezethetjük a **tömegközépkör** fogalmát. Egy forgó test tehetetlenségi nyomatéka és tömege ebben az elméleti, vastagság nélküli körben koncentrálódik. Ha egy testnek ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát, akkor a számításainkhoz a testet helyettesíthetjük a tömegközépkörével, aminek pontosan ugyanannyi a tehetetlenségi nyomatéka és a tömege.

Egy Θ tehetetlenségi nyomatékú, m tömegű forgó test tömegközépköre az az r_{tk} sugarú körvonal, amelyre

$$\Theta = m \cdot r_{tk}^{2}$$

Ez a fogalom csak a tehetetlenségi nyomaték egy másféle megadására szolgáló lehetőség.

Adott egy test, amelynek a tömege 2 kg, a tehetetlenségi nyomatéka 0,1 kg·m². Mekkora a test tömegközépkörének a sugara? A képletből $\mathbf{r}_{tk}$=gyök(0,1 / 2)=22,3 cm. Vagyis ha a testet egy ilyen méretű, vékony falú hengerré vagy vékony gyűrűvé gyúrnánk, akkor annak a tehetetlenségi nyomatéka pont ugyanakkora lenne, mint most. Azt, hogy maga a test eredetileg milyen alakú, *nem is kell tudnunk*.

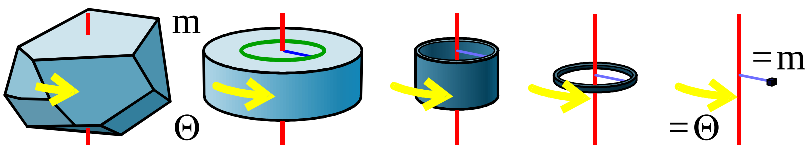
A korábbi fejezetekben a tömegközéppontot is gyakran már a test tömegét is hordozó tömegpontként kezeltük, kiszámoltuk az impulzusát és így tovább. A tömegközépkör csak egy körvonal, de megengedhető az is, hogy egy vékony gyűrű (vagy üres henger) alakú, tömeggel rendelkező testként beszéljünk róla. Ha azt olvasod, hogy a tömegközépkör 0,1 kgm²-es, akkor közvetlenül a test tehetetlenségi nyomatékát látod megadva, benne a test tömegével is, amit viszont kiegészítő adatként szintén meg lehet vagy meg kell adni. A mértékegység tisztázza a szám jelentését. Tehát: **a tömegközépkör vagy csak egy tömegtelen körvonal, vagy már egy körvonalnyira összepréselt tömeg.**

Forgómozgás értelmezése körmozgásként

Egy forgó test forgómozgásának adatai átalakíthatók úgy, hogy végül egyenlővé tesszük egy tömegpont körmozgásává. Ezzel a művelettel könnyebben értelmezhetővé válhat a kifejtett ható erő hatása a forgásra. Ez a fejezet nem "kötelező anyag", de a végén a tételt azért nézd meg.

Adott egy tetszőleges alakú test, amelynek mérésekkel megtudtuk a tömegét és a tehetetlenségi nyomatékát is. A tömeg mérését nem kell magyarázni, vagy mégis? Általában elintézhetjük úgy, hogy a test nehézségi erejét más testek (súlyok) nehézségi erejének összegével hasonlítjuk össze, egy kétkarú mérlegen. Ha viszont a nehézségi erők kicsik, lehetséges megoldás az, hogy egy ismert erővel felgyorsítjuk, és a gyorsulását megmérve következtethetünk a tehetetlenségére, ami viszont azonosnak vehető a tömegével, lásd A DINAMIKA ALAPTÖRVÉNYE fejezetet. $F=m \cdot a$. Jövőre tanulni fogod a periodikus mozgásokat, ott ennek a módszernek a továbbfejlesztését is látni fogod.

A tehetetlenségi nyomaték szintén egy tehetetlenség, a mérési módszer is hasonló: a testet ismert forgatónyomatékkal megforgatjuk, és a szöggyorsulásából következtethetünk a tehetetlenségi nyomatékra, $M=\beta \cdot \Theta$.



Ezt a testet át lehet gyúrni egy olyan hengerré, koronggá, amelynek azonos a tehetetlenségi nyomatéka. Ha már ismerjük ezt a tehetetlenségi nyomatékot, akkor a henger sugara kiderül a $\Theta=m \cdot r^2$ képletből. A térfogatuk ugyanaz lesz. A test tömegén és tehetetlenségi nyomatékán mindeközben nem változtattunk.

Már az eredeti testhez is kiszámítható a tömegközépkörének sugara, az előbb láttál rá példát. A hengernél ez még egyszerűbb, mert ha a sugara r_h, akkor

$$r_{tk} = \frac{r_h}{2}$$

a zöld kör ezt mutatja. Ha a tömör hengerünk anyagát összepréseljük egy olyan üres hengerré (hengerpalásttá), amelynek a sugara r_{tk}, a tömege pedig továbbra is m, akkor a test tehetetlenségi nyomatéka *továbbra is ugyanaz*, mint amennyi eredetileg volt. Ehhez a test sűrűségét szinte végtelenre kell növelni, de elméletileg ezt el lehet képzelni. A kapott hengerpalást magassága bármekkora lehet, az egyszerűség kedvéért most nem változtattunk rajta.

A testek tehetetlenségi nyomatéka nem függ a testnek a tengellyel párhuzamos irányú kiterjedésétől, a magasságától. Ezért a test tehetetlenségi nyomatéka nem fog változni akkor, ha ezt a hengerpalástot összepréseljük egy ugyanolyan átmérőjű, nagyon vékony gyűrűvé. A tömeg nem változott, és a tömegközépkör definíciójából következően a tehetetlenségi nyomatéka sem.

Eljutottunk ahhoz az állapothoz, amikor a tehetetlenségi nyomaték fejezetében látott képletek szerint ez a roppant sűrű anyagból álló nagyon vékony gyűrű helyettesíti az eredeti testet. A helyettesítés úgy értendő, hogy ugyanaz a tömege és ugyanaz a tehetetlenségi nyomatéka is. Csak olyan dolgokat csináltunk vele, amik ezeken az adatokon nem változtatnak. A gyűrűre érvényes, hogy $\Theta = m \cdot r^2$.

Ha megnézed a tömegpont tehetetlenségi nyomatékának meghatározását, látni fogod, hogy ez a gyűrű a kör mentén haladva összepréselhető egyetlen elméleti tömegponttá úgy, hogy a tehetetlenségi nyomatéka most sem változik. $\Theta = m \cdot l^2$, mondja a képlet, az l itt az r_{tk}, az m pedig még mindig ugyanaz.

Végignézhetted azt a lépéssorozatot, amelyben

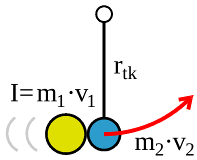
Egy tetszőleges forgó testet összepréselhetünk egy <u>változatlan tömegű</u>, körmozgást végző tömegponttá, amelyhez tartozó nyomatékkar hossza a test tömegközépkörének sugara. Ekkor a test és a tömegpont <u>tehetetlenségi nyomatéka</u> megegyezik.

Ennek az egyszerűsítő átalakításnak (*redukciónak*) köszönhetően <u>a test forgására ható erők összemérhetőkké váltak a tömegpont körmozgására ható erőkkel</u>, illetve értelmezhetőbbé tehető egy haladó mozgás kapcsolata egy forgómozgással.

Az átalakítással egy kiegyensúlyozott forgómozgást végül excentrikus forgással (keringéssel) váltjuk fel, de ebben a vonatkozásban nem kell a tengely oldalterhelésével foglalkoznunk, ez csak egy elméleti modell egy másfajta megközelítéshez.

Melyik szabályos test tehetetlenségi nyomatékával egyezik meg az eredmény?

A felhasználási lehetőségek egyike látható az ábrán: <u>egyenes mozgás impulzusának átalakulása körmozgás perdületévé</u>. A két mennyiség "átváltása" azért nehéz elméleti feladat, mert két teljesen eltérő mozgásról van szó. De ha a test forgómozgását a pontszerű tömeg megfelelő körmozgásává redukáljuk, akkor az erőlökés mozzanatát felfoghatjuk egy teljesen rugalmas *ütközésként*, és máris ismerős terepen járunk.



A rendszerbe $\mathbf{I}$ $(=\mathbf{m_1 \cdot v_1})$ impulzust hoz a sárga golyó, és ütközik a forgó testet az előbbiek szerint helyettesítő pontszerű $\mathbf{m_2}$ testtel. Ez az ütközés után $\mathbf{v_2}$ sebességet vesz fel, de most ez kerületi sebesség lesz, mert utána egy $\mathbf{r_{tk}}$ sugarú körpályán mozog. Vegyük úgy, hogy az ütközés során az egész impulzus átadódik, $\mathbf{m_2 \cdot v_2 = I}$. A szögsebesség és a kerületi sebesség közötti kapcsolat $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v_2 / r_{tk}}$, a perdület $\mathbf{N = \Theta \cdot \omega}$. A $\boldsymbol{\Theta}$ tehetetlenségi nyomaték megállapításához csak arra kell emlékeznünk, hogy a sugár most a *tömegközépkör* sugara, ezért $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{m_2 \cdot r_{tk}^2}$. Mindent összegezve azt kapjuk, hogy a sárga test hozott impulzusa így válhat a kék test perdületévé:

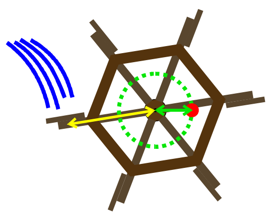
$$N = \Theta \cdot \omega \quad = m_2 \cdot r_{tk}^{\ 2} \cdot \frac{v_2}{r_{tk}} \quad = m_2 \cdot v_2 \cdot r_{tk}$$

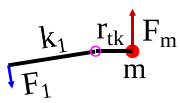
$$N = I \cdot r_{tk}$$

Emlékezz arra, hogy a tehetetlenségi *nyomaték* abban más, mint a tehetetlenség, hogy van hozzá egy erőkar is. Az impulzus*nyomaték* (másik nevén perdület) abban más, mint az impulzus, hogy van hozzá egy erőkar is.

Mi az általunk használt neve az erőnyomatéknak?

Most az impulzus erőlökése <u>a tömegközépkör érintője mentén</u> lépett a rendszerbe, de ez általában nem így van. Nézd meg ezt a vízimalom-kereket! Berajzoltam a tömegközépkörét is, és a piros ponttal szimbolizáltam a tömegét is (a körön bárhol lehetne), amely az impulzust átveszi, a tengely körüli forgássá alakítva. Láthatod, hogy az a pont, ahol a víz az impulzusát a rendszerbe beadja, jóval távolabb van a tengelytől mint amekkora a tömegközépkör sugara. Alatta láthatod a helyzetet lecsupaszítva, megtartva a lényeget. Mi ez? …





Úgy van, ez egy teljesen hétköznapi kétkarú emelő, a 2. témakör részletesen foglalkozott vele. Azt látjuk, hogy ha a víz kifejt rá egy F_1 erőt, k_1 hosszúságú erőkaron, az létrehozza a piros m tömegre ható F_m erőt, ennek a karja maga az r_{tk}. Az emelő mérleghinta-szabálya szerint

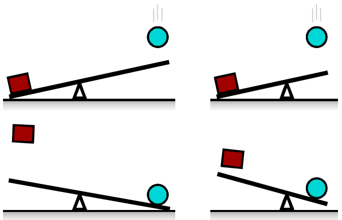
$$\frac{F_m}{F_1} = \frac{k_1}{r_{tk}}$$

azaz nagy erőhöz kis erőkar tartozik és fordítva.

Az impulzus és az erő közötti összefüggést már ismered: $\Delta I = F \cdot t$, erre alapozva kijelenthető az is, hogy

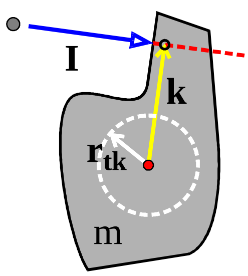
$$\frac{F_m \cdot t}{F_1 \cdot t} = \frac{I_m}{I_1} = \frac{k_1}{r_{tk}}$$

ahol I_1 a rendszerbe beérkező, ez esetben a víz által hozott impulzus, I_m a tehetetlenségi nyomatékot r_{tk} erőkarral helyettesítő tömegpont (a piros pont) leendő impulzusa, ebből lesz a perdület. Mert, remélem, emlékszel, a perdület kiszámítása a célunk. Pontosan ugyanide lyukadtunk volna ki, ha impulzus helyett az emelőn létrejövő $F_1 \cdot k_1$ *forgatónyomatékot* vesszük alapul.



Nem is a levezetés a lényeg, hanem a tanulság. Ha a forgó testre ható külső erő forgatónyomatékát vagy impulzusát a tengelytől k_1 távolságra alkalmazzuk, akkor azt egy k_1/r_{tk} értékkel megszorozva kell számításba vennünk. Ez azért van így, mert ha az érkező hatásnak jó nagy erőkart adunk, akkor sokkal nagyobb perdületet tud létrehozni, mint ha az erőkar kicsi.

Most már csak össze kell illeszteni a két eredményünket. Az előbb megtudtuk, hogy ha egy testre egy erőlökést fejtünk ki úgy, hogy az pont a tömegközéppkörének érintőjeként hasson a testre, akkor a testben keletkező perdület az $N = I \cdot r_{tk}$ képlettel számolható ki. Azt is megtudtuk, hogy ha a testre a tengelytől ennél *távolabb*, k távolságban fejtjük ki az erőlökést, akkor a perdület nagyobb lesz, a távolság arányában, tehát szorozni kell egy k/r_{tk} tényezővel is. Írjuk le együtt:



$$N = I \cdot r_{tk} \cdot \frac{k}{r_{tk}}$$

Ha az egyszerűsítést elvégezzük, megkapjuk az ilyen esetekben általánosan használható tételt.

Ha egy elforgatható testre egy I erőlökést fejtünk ki úgy, hogy annak hatásvonala a forgás-tengelytől k távolságra van, akkor az így létrehozott perdületváltozás értéke

$$\Delta N = I \cdot k$$

Ahogy arról már máskor is beszéltünk, az N és a ΔN között az a különbség, hogy az utóbbi a perdület *változását* jelenti, tehát ha a testnek már van egy perdülete, akkor a képlet szerint $I \cdot k$ értékkel nő. Vagy csökken, ha az impulzus iránya a meglevő perdülettel ellentétes. Így pontos.

Perdületmegmaradás

Az impulzusmegmaradás analógiájára **a perdület megmaradásának törvénye** így szól:

Zárt rendszerben a testek perdületeinek (impulzusnyomatékainak, forgásmennyiségeinek) **előjeles összege mindig állandó marad. A rendszeren belül a testek megváltoztathatják egymás forgás-állapotát, de az összperdületen csak külső erő tud változtatni.**

Az impulzusmegmaradás témájánál látott képlethez hasonló itt is felírható:

$$\sum_{i=1}^{n} \Theta_i \cdot \omega_i = N_0 \quad \text{állandó}$$

ahol az $\mathbf{N_0}$ a rendszer kezdeti összperdülete.

A perdülettétel azt mondja, hogy a test perdületét külső erő változtathatja meg, a megmaradási tétel pedig azt állítja, hogy a zárt rendszerben a testek egymás perdületét is megváltoztathatják. Hogy van ez? Egy testhez képest egy másik test hatása már külső erő. Ha ezt a két testet önálló, zárt rendszernek vesszük, akkor az egyik test ereje megváltoztatja a másik perdületét, de *ugyanennyivel kell a saját perdületének is változnia* ellenkező irányban. Mindkét testre külső erő hat, de a perdületek egyikből a másikba vándorolhatnak (részlegesen is), és a két testben együttvéve állandó marad. Ez akárhány testre igaz, ha gondoskodni tudunk arról, hogy azok a világ többi részétől függetlenek maradjanak.

A törvény érvényesülése megfigyelhető egyetlen forgó testen is, ez gyakorlatilag a forgási tehetetlenség törvényét jelenti. A perdület megmaradását egy nagyon egyszerű kísérleti eszközön is megfigyelhetjük: egy guruló labdán. Haladás közben a labda egyenletes forog. Ha az asztal végén leesik, akkor esés közben is láthatóan forog tovább.

Mit fejez ki a Θ·ω szorzat?

Az AKCIÓ–REAKCIÓ fejezetben leírtakhoz hasonlóan a több testből álló rendszerek perdületének megmaradása is okozhat érdekes jeleneteket. Például egy kis turmixgép perdülete kikapcsolt állapotban nulla. Amikor bekapcsolod, akkor az az egyik irányba erősen megrándul. Ennek az a magyarázata, hogy a motor a keverőkarokat jókora gyorsulással felpörgeti, vagyis a rendszer egy része nagy perdületet kap. A karok tömege nem nagy, de a fordulatszámuk és szögsebességük már az. A gép tekinthető zárt mechanikai rendszernek, de akkor a benne levő perdületnek állandónak kell maradnia. Ehhez az szükséges, hogy a turmixgép többi része ugyanakkora, ellentétes irányú perdületet kapjon. A tömege ennek sokkal nagyobb, vagyis a tehetetlenségi nyomatéka is sokkal nagyobb, ezért a forgása lesz lassabb, mert a kettő szorzata adja a perdületet. A két rész perdülete kiegyenlíti egymást.

Csak azért nem forog tovább az egész turmixgép, mert erősen fogjuk, a testünk tömegéhez képest jelentéktelen mértékű perdületet elnyelve, egész pontosan *a Föld perdületét megváltoztatva* vele. Hiszen **a perdület nem tűnik el**, csak máshová vándorol. Ezt az impulzus fogalma kapcsán már alaposan megtanulhattad, és a perdület az impulzus megfelelője a forgómozgásoknál. Ha jégre állítanánk a gépet és úgy kapcsolnánk be, pörögni kezdene.

A helikopter főrotorja (a nagy légcsavarja) egy jókora kiterjedésű, nehéz szerkezet, nagy tehetetlenségi nyomatékkal. Ha repülés közben a rotor forgási sebességét növelni kell, a törvény szerint a helikopter testével együtt alkotott zárt rendszerben az összperdületnek akkor is meg kell maradnia az aktuális értéken. Ezért a helikopter is elkezdene forogni a rotor tengelyén, az ellenkező irányba. Ennek kiküszöbölésére szolgál a farokrotor, egy másik légcsavar, amely érintő irányú elfordító erőt tud kifejteni, és ezzel ellensúlyozzák a főrotor sebességének megváltozásából származó forgató hatást. A farokrotor rendszeren kívüli tényezőt vesz igénybe, az elfújt levegő impulzusa formájában, ezért áll meg a törzs forgása a megmaradási törvény megsértése nélkül.

Az egyenes vonalú mozgások melyik fogalmához hasonlítható a perdület?

A perdület megmaradásának van egy <u>különleges</u> következménye is. Tudjuk, hogy az impulzusban a tömeg és a sebesség szorzata van. Amikor az impulzus állandó, akkor az $\mathbf{m \cdot v}$ szorzat állandó, márpedig a tömeg állandó, ebből következően a sebesség is az. A perdület képlete szerint $\mathbf{N=\Theta \cdot \omega}$, a forgás szögsebességének és a tehetetlenségi nyomatéknak a szorzata állandó. De arról már korábban is beszéltünk, hogy **a tehetetlenségi nyomaték nem állandó**. A változásához elegendő, ha a test alakja megváltozik. Tudod, a tömegpontok távolsága a tengelytől az, ami a tehetetlenségi nyomatékot meghatározza. Ha kinyitsz egy esernyőt, megnöveled a tehetetlenségi nyomatékát, ilyen egyszerű.

A klasszikus példa a műkorcsolyából ismert jelenet, amikor a versenyző kitárt karral forogni kezd. Aztán a karját behúzza*, magához szorítja, és akkor a forgási sebessége látványosan megnő. Ehhez nem vesz igénybe semmilyen további erőt, ez pusztán a perdületmegmaradás következménye. A törvény szerint a korcsolyázó saját "rendszerén" belül a perdület nem változhat. Azzal, hogy a karját behúzta, a versenyző a saját <u>tehetetlenségi nyomatékát</u> csökkentette. A tömege nem változott, de a tömegpontjai átlagosan *közelebb kerültek a forgástengelyhez*. A perdület nem vész el, ezért cserébe a szögsebességnek <u>kell</u> megnőnie, ezt diktálja a törvény, $N=\Theta \cdot \omega$, tehát gyorsul

* „– Emlékszel, amikor egy helyben lassan pörögni kezdenek, először széttárt karral …
– Igen …
– Aztán hirtelen behúzzák a karjukat, és akkor mit látsz?
– Én már semmit. Addigra elalszom.”
(Romhányi József: Mézga Aladár különös kalandjai – Rapídia)

a forgás. Amikor ismét kitárja a karját, újra megnöveli a tehetetlenségi nyomatékát, és lassul a forgás. Amikor ugrik, akkor is magához szorítja a karját, hogy elég gyorsan tudjon forogni, amikor pedig megérkezik, kezét-lábát kinyújtja, hogy a forgást megállítsa.

Ugyanez a jelenség bármilyen forgó mozgásnál létrejöhet. Egy szaltó közben szintén a forgatónyomaték csökkenthető azzal, hogy az ugró összehúzza magát. Csak ettől, minden külső erőhatás nélkül meg fog változni a forgás sebessége, mert a perdület nem párologhat el. Ha egy head spin közben behajlítod a lábaidat, éppúgy csökken a forgatónyomatékod, mint a korcsolyázónak. A tehetetlenségi nyomaték hangolásával, a karok, lábak kinyújtásának változtatásával a forgás sebessége tetszés szerint beállítható. A törvény kötelez, a szögsebesség igazodik a tehetetlenségi nyomaték változásához, *akkor is*, ha ez nekünk nem jó. Ha a forgást fékezni akarod, a tehetetlenségi nyomaték megnövelése, a lábaid szétnyitása nélkül, akkor külső erőt kell bevonnod, például súrlódást, letéve a kezedet.

Mi is a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség kapcsolata a perdülettel?

Még a Naprendszer keletkezésében is ott volt ez a megkerülhetetlen fizikai törvény. Az ősidőkben a Nap, a bolygók és minden egyéb egy elképzelhetetlenül nagy, ritka porfelhő volt a világűrben, amely a saját gravitációja hatására mérhetetlenül lassan húzódott össze. Aztán történt valami, például elhaladt "a közelben" egy csillag, vagy egy szupernóva robbanásának lökése elért hozzánk, és ez egy kicsit meg-mozdította a felhőt. Egy egészen kevés forgás, egy perdület is bekerült a mozgásba. Amikor a felhő összetömörödött Nappá és bolygókká, ez a perdület megmaradt, a forgás felgyorsult, és a Nap körül ezért keringenek és forognak ma a bolygók, a holdak, de még a külső Oort-felhő is.

Mozgások összehasonlítása

Az egyenes vonalú és a körmozgás sok tulajdonságában összepárosítható egymással. Tekintsük át ezeket egy táblázatban.

egyenes vonalú mozgás	körmozgás és forgómozgás
Egyenletes sebességnél a test időegységenként azonos **úthosszt** (s) tesz meg.	Egyenletes sebességnél a test pályája időegységenként azonos **elfordulási szöget** (φ) zár be.
	A test által bejárt **ívhossz** (s) az elfordulási szög mellett a pálya sugarától (r) is függ.
A **sebesség** jele v.	Sebességnek a kerületi helyett inkább a **szögsebesség**et (ω) tekintjük, mert a kerületi sebességtől eltérően az független a pálya sugarától.
A magára hagyott test megtartja egyenletes **haladási** sebességét.	A magára hagyott test megtartja egyenletes **keringési vagy forgási** sebességét.
A test sebességének megváltoztatásához a testre **erőt** (F) kell kifejtenünk.	A test keringési vagy forgási sebességének megváltoztatásához a testre **forgatónyomatékot** (M) kell kifejtenünk.
	A forgatónyomaték abban különbözik az erőtől, hogy tartalmazza az erő és a forgástengely közötti távolságot is. $M=F\cdot k$.
A test bizonyos mértékig ellenáll az erőnek, a **tehetetlenségével**.	A test bizonyos mértékig ellenáll a forgatónyomatéknak, a **tehetetlenségi nyomatékával**.
A tehetetlenséget a **tömeggel** (m) fejezzük ki. A test tehetetlensége egyenlő a testet alkotó tömegpontok tehetetlenségeinek összegével.	Tömegpont tehetetlenségi nyomatékát (Θ) a tömeg (m) és a forgástengelytől mért távolság (l) alapján fejezzük ki ($m\cdot l^2$). Testek tehetetlenségi nyomatékát a test pontjainak tehetetlenségi nyomatékaiból adjuk össze. Ehhez vannak kész képletek is.
A tehetetlenség nem függ a test alakjától.	A tehetetlenségi nyomaték függ a test pontjainak a tengelytől mért távolságaitól, összességében a test alakjától és súlyeloszlásától.
A tehetetlenséget a **tömegközéppont**ban összegződő hatásnak vesszük.	A forgó test tehetetlenségi nyomatékát a **tömegközépkörében** összegződő hatásnak vesszük.
A test reagálását az erőre a **dinamika alaptörvénye** írja le: $a=F/m$. Az erő hatására a haladási sebesség megváltozik.	A test reagálását az erőre a **forgómozgás alaptörvénye** írja le: $\beta=M/\Theta$. A forgatónyomaték hatására a szögsebesség megváltozik.
Állandó erő hatására a test sebessége (v) egyenletesen változik, a **gyorsulás** (a) állandó.	Állandó forgatónyomaték hatására a test szögsebessége (ω) egyenletesen változik, a **szöggyorsulás** (β) állandó.
A test gyorsításába fektetett **erő** (F) a test **impulzus**át (I) növeli. Az impulzus csökkentéséhez ellenirányú erő kifejtése szükséges.	A test szögsebességének növelésébe fektetett **forgatónyomaték** (M) a test **perdület**ét (N) növeli. A perdület csökkentéséhez ellenirányú forgatónyomaték kifejtése szükséges.
Az impulzus megváltoztatásához idő kell. $\Delta I=F\cdot t$.	A perdület megváltoztatásához idő kell. $\Delta N=M\cdot t$.
Zárt rendszeren belül az impulzusok összege állandó.	Zárt rendszeren belül a perdületek összege állandó.

Energia

Legyen már valami hasznunk is a mozgásból.

Munka

Ez egy nagyon hosszú fejezet, de csak azért, mert egy megalapozó fontosságú fogalmat magyarázok meg jó alaposan, mindenféle irányból. Nem nehéz, csak olvasd végig, akár több menetben.

A **mechanikai munka** definíciója elég egyszerű. Munka az, ha egy erő hatására egy test elmozdul. Figyeld meg: *hatására*. A munkát az végzi, ami (vagy aki) az erőt gyakorolja a testre. A munkát a test*en* végzi. És mivel az ERŐ meghatározása szerint erőt kifejteni csak egy test tud, közvetlen érintkezéssel vagy erőtér közvetítésével, ezért a munkát a testen mindig egy másik test végzi, akkor is, ha a mi testünk az a test.

A mechanikai munka az a mennyiség, amely úgy és csak úgy keletkezik, hogy egy test erőt fejt ki egy másik testre, amely az erő hatásvonalának irányában elmozdul.

A munkához az elmozdulásnak az erő hatásvonalának irányában kell megtörténnie.

Mi következik ebből? Az egyik az, hogy ha te öt percen át tartod megemelve az autót, amíg valaki kereket cserél rajta, akkor végül hiába érzed úgy, hogy jártányi erőd sem maradt, *nem végeztél munkát.* A kocsi ugyanis, amíg te az erőt kifejtetted rá, nem mozgott. Nincs elmozdulás, nincs munka, a szabály így szól. Hogy ez egy hülyeség? Más szempontból talán, de a fizikában, különféle okokból, a munkát így definiálták, mert további fizikai fogalmak alapjául a munka meghatározása így lett célszerű. Ezért amikor fizikapéldát oldasz meg, el kell felejtened a munka fogalmának hétköznapi használatát, és *szigorúan* tartanod kell magad ehhez a meghatározáshoz.

A mozgás önmagában nem elég. Ha a világ legerősebb embereinek rendezett versenyen ötven méteren át cipelnek hihetetlen súlyú vasakat, akkor sem végeztek munkát, a mechanikai munka fizikai meghatározását nézve. Merthogy a testek mozognak ugyan, de arra, amerre a versenyzők az erejüket kifejtik rá, vagyis felfelé, ezek a testek centit sem mozdulnak. Csak vízszintesen. Az pedig egyáltalán nem érdekes. Az erő hatásvonalának irányába nincs elmozdulás, akkor nincs munkavégzés sem.

Sőt, még az sem érdekes, hogy a test mekkora utat ($\mathbf{s}$) tesz meg egyéb irányokban, miközben a testre az erőt kifejtjük, hanem az erő irányú *elmozdulás* a fontos. Az elmozdulás ($\mathbf{d}$) az út kezdő és végpontját összekötő egyenes szakasz – lásd az ÚT fejezetet –, és az út lehet össze-vissza kanyargó vonal, a munka kiszámításához ilyenkor csak a mozgás végeredményét használjuk fel. Tegyük fel, hogy egy irodaház egyik szobájában felemelünk egy ládát, és átvisszük a felettünk levő szobába. Kilépve az ajtón elcipeljük a ládát a folyosó végén levő lépcsőig, felmegyünk egy emeletet, és az ugyanolyan hosszú folyosón bemegyünk a szobába. Mennyi munkát végeztünk? A derekunk leszakad, de a mechanikai munka kiszámításában az elmozdulás kb. 3 méter.

A **mechanikai munka** kiszámítása:

$$W = F_d \cdot d$$

ahol $\mathbf{W}$ a munka jele (az angol *work* szóból), $\mathbf{d}$ a test elmozdulása, és $\mathbf{F_d}$ az elmozdulás irányában a testre kifejtett erő. A mértékegység

$$[W] = N \cdot m$$

Megjegyzés: Ezt a mértékegységet már láttuk, a FORGATÓNYOMATÉK mértékegységeként. De persze ettől a munka és a forgatónyomaték nem válik azonos értelművé. Ott a távolság az erőkar hossza volt, vagyis teljesen más dolgokról van szó.

A munka mértékegységének másik nevet is meghatároztak, ez a **joule**, a jele **J**. A szó kiejtése nem egységes, tartja magát a „zsúl”, de az szinte biztos, hogy Mr. James Prescott Joule angol sörfőző és fizikus a családnevét „dzsúl”-nak ejtette.

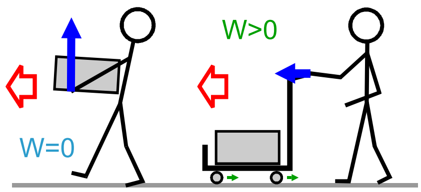
$$1\,J = 1\,N \cdot m$$

Tehát **1 joule mechanikai munkát végzünk, ha 1 newton erővel 1 méternyit mozdítunk el egy testet**. Mekkora testet? Mindegy. Nem számít sem a tömeg, sem a méret, sem az, hogy mennyi *idő* alatt mozdítjuk el a testet. Erőször elmozdulás, csak ennyi.

Mennyi mechanikai munkát végez egy daru, ha 3 kN súlyú téglát emel fel 8 méter magasba?

Talán felmerül benned, hogy itt nem került még szóba a tehetetlenség törvénye, vagyis hogy egy vízszintesen mozgó test mozgásához semennyi erő sem kell. Ez így van, és ha a testet csak "kíséred", nem is végzel munkát. Erőt ahhoz kell kifejtenünk, hogy a test mozgását akadályozó valamilyen erőt küzdjünk le, például a súrlódást, amire a ládacipeléskor most nem volt szükségünk.

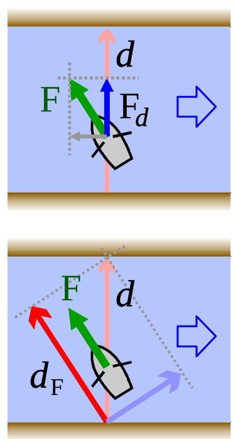
Nézzük meg még egyszer a ládacipelést. A folyosókon gyalogolva az *általunk kifejtett erő függőleges* volt, a láda súlyát tartottuk, de a láda ekkor *függőleges irányban kicsit sem mozgott*, a vízszintes mozgatásához pedig – tegyük fel – nem kellett erő, az egyenes vonalú egyenletes mozgás erő nélkül zajlik. Ezért ezek az útszakaszok az általunk a ládán végzett mechanikai munka szempontjából teljesen érdektelenek, nulla munkát érnek. Amikor a ládával felmentünk a lépcsőn, akkor ugyan valamennyit előrefelé is mentünk, mert a lépcső rézsútos, de végre felfelé is mozogtunk, tehát a ládának volt olyan irányú mozgása is, ami megegyezett a kifejtett erőnk irányával. Ekkor végeztük a végül számításba veendő munkát.



De mi a helyzet, ha a ládát *egy kocsin* toljuk végig a folyosókon? Az bizony már sokkal több munkát jelent! A kocsit ugyanis mi toljuk, legyőzve a gördülő-ellenállási (és súrlódási) erőt, eközben a kocsi azon a vonalon mozog, amerre mi az erőt kifejtjük. A lépcsőn feljutással végzett munka nem változik, de most hozzá kell adnunk a folyosón végzett munkánkat is. Úgy, hogy a kocsi gurításához használt erőnket megszorozzuk az így megtett vízszintes irányú úttal.

Ha körbe-körbe sétálgatunk a ládát cipelve, akkor végül a végzett munkánk *nulla*, mert nem volt egy pillanat sem, amikor a láda legalább részben arra mozdult volna, amerre az erőnk mutat (és a példa érdekében tegyük fel, hogy tökéletes simasággal, vízszintesen, egyenletes sebességgel mozgott a láda tömegközéppontja). Ha egy kocsin körbe-körbe tologatjuk, akkor viszont nem kell tartanunk a ládát, *sokkal könnyebb* a dolgunk, de a végzett munkánk mégsem nulla, mert a kocsi gördülő-ellenállását erő kifejtésével győztük le, mégha az az erő nem is sok. (Az is igaz, hogy aztán a lépcsőn még a kocsit is fel kell cipelnünk.)

Az út melyik szakaszán végeztünk munkát a súllyal szemben?



Foglalkozzunk még egy kicsit az iránnyal. Csónakkal evezünk át a folyón, és mivel a sodor ellen tartva evezünk, sikerül a partra merőlegesen átjutni. A megtett útvonal, egyben az elmozdulás is $\mathbf{d}$ hosszúságú, és $\mathbf{F}$ az az erő, amit a csónak mozgatása érdekében kifejtünk. Kérdés, hogy mekkora munkát végeztünk.

Kétféleképpen lehet a helyzetet nézni. Az egyik szerint az $\mathbf{F}$ erővektort, szokás szerint, helyettesíthetjük két olyan összetevő erővektorral, amelyeknek az $\mathbf{F}$ az eredője. Ezt most úgy csináljuk, hogy az egyik összetevő ($\mathbf{F}_d$) az elmozdulás irányába mutat, a másik pedig merőleges. Az utóbbi az elmozdulás szempontjából nulla, nem számít. (Ha ezzel problémád van, nézd meg az EREDŐ ERŐ fejezetet.) A munka kiszámításakor csak az első összetevőt szorozzuk az elmozdulással, és megkaptuk a munka előbbi képletét, $\mathbf{F}_d \cdot \mathbf{d}$.

De úgy is nézhetjük az akciót, hogy az erőt nem bontjuk fel, viszont keresünk *két olyan elmozdulást*, amelyek eredője a $\mathbf{d}$ elmozdulás. Itt a mozgás vektorát bontjuk fel összetevőkre, az egyik összetevő az *erővel* párhuzamos. A másik viszont arra merőleges, vagyis a kifejtett erő és a munka szempontjából érdektelen. Bebizonyítható, hogy az $\mathbf{F}_d \cdot \mathbf{d}$-vel *azonos* értéket ad a munka egy másik lehetséges képlete:

$$W = F \cdot d_F$$

ahol tehát $\mathbf{F}$ az általunk kifejtett erő, és $\mathbf{d}_F$ az *ennek irányában* megtörtént elmozdulás. Figyeld meg jól az ábrán a két esetet, és a két képlet közötti különbséget. Azért érdemes ezt is megjegyezni, mert **egyes feladatok megoldásához ez a felfogás a kényelmesebb**.

A csónakra egyébként két erő hat: a mi evezésünk ereje és a víz sodrása, de a mi munkánkat a mi erőnkből kell számolni.

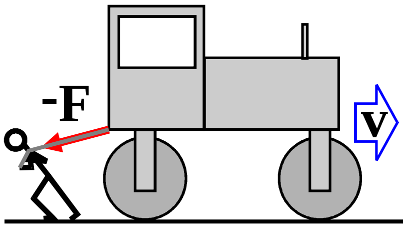
Mit bontottunk vektorösszetevőkre a második esetben?

Nem mindig van látszatja a munkavégzésnek. Ha az előre haladó úthengert teljes erőből toljuk, akkor is nehéz elhinni, hogy az erőfeszítésünk bármit is hozzátenne a sebességéhez. Pedig valószínűleg igen, legfeljebb eltörpül az úthenger motorja által végzett munka mellett. Mindenesetre az általunk kifejtett erőt az úthenger mozgásával összeszorozva megkapjuk a mi mechanikai munkánk mennyiségét. De ha az úthengert ugyanakkora erővel oldalról nyomjuk, látszatra pont ugyanannyit ér az erőfeszítésünk, de az erőnk irányába nincs elmozdulás, a munkánk biztosan nulla.

Húzni vagy tolni: munkavégzés szempontjából egyforma erőkifejtés, csak az irány más.

Van negatív mechanikai munka is. Ez végképp hülyeségnek tűnik, hétköznapi értelmet nem is igen találhatunk benne. Nem értelmes, de *értelmezhető*. Ugyanazért kell ezt a lehetőséget megengedni, amiért a lassulást negatív gyorsulásnak vesszük: ezzel egy kalap alá lehet venni különböző dolgokat, ennek következtében ugyanaz a képlet használható rájuk, egy képlet megtanulása is elég. Gondolom, ettől hirtelen rokonszenvessé vált számodra a negatív munka, ha eddig még nem volt az.

A W, a szorzat akkor lesz negatív, ha az egyik tényezője negatív. Ez azt jelenti a gyakorlatban, hogy az erő iránya és az elmozdulás iránya ellentétes. Ha tehát kötélen húzzuk teljes erőből az úthengert, de az az ellenkező irányban mozog, akkor negatív munkát végzünk az úthengeren. Ugyanez történik, ha az úthengert toljuk, és az velünk szemben mozog, ilyenkor mondhatjuk azt, hogy elsőre jó ötletnek tűnt.



A negatív munka egyáltalán nem jelenti azt, hogy nem kell erőlködnöd. Azt jelenti, hogy hasztalanul erőlködsz, mert ugyan húzod, de mégis távolodik. Lehet, hogy egy lejtőn ezzel lassítod egy kocsi legurulását, a munka mégis negatív. Ha viszont egy bika tol téged, de te nem próbálod őt sem tolni, sem húzni, akkor sem pozitív, sem negatív munkát nem végzel, mert nem erőlködsz.

A munkát nem mindig mi végezzük, hálistennek. Alkalmas erre a szél, a folyó, a gravitációs erő, igavonó állatok, és persze a számtalan gép is. Általánosságban egy test egy erővel végez mechanikai munkát egy másik testen, és hogy ezek a testek mik, azok már csak példák, hasonlatok.

Merre mozog a test, amikor negatív munkát végzünk rajta?

Összetett munkavégzés

A mechanikai munka tárgyalásánál a tankönyvekben olyanok olvashatók, hogy mikor kell csak a test elmozdulását számolni, és mikor a teljes útját. Nem kell ezt komplikálni. A munka az erő és az irányában vett elmozdulás szorzata.

De akkor mi volt azzal, amikor a ládát a kocsin toltuk? Arról volt szó, hogy akkor munkát végeztünk! Pedig az eredeti példa szerint az elmozdulásunk csak 3 méter.

Úgy van. De a láda cipelésekor az erőnk iránya nem változott, és mivel a láda súlya ugyanannyi maradt, az erő nagysága sem változott. *Az erővektor nem változott.* Akkor ezt egyetlen folyamatos munkavégzésnek vesszük, amelyben az erő-irányú elmozdulást vesszük számításba, alapesetben így kell.

A kocsi tolásakor viszont az erő először vízszintes volt, aztán függőleges, aztán megint vízszintes. A láda átszállítása *három szakaszra bontható*, egy-egy erővel és elmozdulással. A szakaszokon végzett munkát egyenként, a már megadott módon kell kiszámolni: erő szorozva az elmozdulással, a három szakaszban egyenként elért elmozdulással.

Ha a munkavégzés során az erő iránya vagy nagysága változik, akkor a munkát szakaszokra kell bontani, és az azokon végzett munkákat összeadni. Egy szakaszon belül az erővektor változatlan legyen.

Pontosan ugyanezt leírhatod egy képlettel is, ha menőzni akarsz. A test útját felosztjuk szükség szerinti szakaszokra, amelyek mérete nagyon kicsi is lehet, és az összes munkát az útszakaszokon végzett munkák összegeként számítjuk ki.

Ha az $\mathbf{F_d}$ mindig az adott útszakaszon megtett **d** elmozdulás irányába mutató erőkomponens, akkor

$$W = \sum_i \left(F_{d,i} \cdot d_i\right)$$

„Szumma í szerint ef dé íszer dé í." Vagyis (csak a forma kedvéért) i-vel megszámozva összeadjuk az elmozdulások és az irányukba mutató erők szorzatait. (A zárójel kiírása itt nem kötelező, de hasznos.)

Ha a mozgás egyenes szakaszok mentén történik, a felbontás kézenfekvő. De a legkanyargósabb **út** is felbontható **elmozdulásokból álló** olyan láncra, ami majdnem pontosan megegyezik az úttal. Nem találtunk fel semmi újat, nézd meg az ÚT fejezet ábráját! Minden egyes útszakaszra önállóan érvényes marad a munka kiszámításának összes szempontja, még mindig tartjuk magunkat az alapelvhez.

Minden mechanikai munka összeadható kisebb szakaszokon történt munkavégzésekből. Ha ki tudjuk számolni egy teher egy lépcsőfokon való felvitelének munkáját, akkor az megszorozható a lépcsőfokok számával, ha az összes munkát akarjuk tudni. Ha vödrönként merjük ki a vizet a kútból, akkor szintén szakaszokból adjuk össze a munkát.

Ha egy mozgás során az erő irányát meg kell változtatni, attól még nem biztos, hogy az utat kis szakaszokra kell bontani. Ha azt kell kiszámolnod, hogy egy ember egy szerpentinen, amelynek a meredeksége végig azonos, a kocsiját végig ugyanúgy tolva összesen mennyi munkát végez, akkor sincs baj, a kanyargós út ilyen szempontból érezhetően *helyettesíthető* egy hosszú, lejtős egyenessel.

Ugyanígy: ha például egy testet egy körpályán tolunk végig, és *mindig* a mozgás irányába toljuk, akkor az elmozdulások összegeként vehetjük egyszerűen a körív hosszát (a kör kerületének egy részét).

Ha biztosan tudjuk, hogy egy útszakaszon az erő minden pillanatban az elmozdulás irányába mutat, akkor ott az elmozdulások összegeként közvetlenül az útszakasz hosszával számolhatunk.

Hogy keletkezik az az erő, *ami miatt* a lejtőn a kocsit feltolva munkát kell végeznünk?

Miért kell odafigyelnünk arra, hogy ez ***mechanikai*** munka? Mert van másmilyen is. A hő is tud munkát végezni, de még mennyire, ilyen esetekben ***termodinamikai*** *munkáról* beszélünk, amikor a víz felforralása, hő bevitele hatására a hőenergia a dugattyú elmozdulásává, mechanikai munkává változik. De mechanikai munka is termelhet hőt. Elég, ha összedörzsölöd a tenyeredet, érzed a termelt hőt, ki is tudnád számolni, hogy milyen súrlódási erő ellen összesen hány métert mozgott egymáson a két tenyered. Az ENERGIA fejezetben szó lesz még ilyenekről.

A termodinamikai munkát azért nem lehet egyszerű hőmérséklet-emelkedésben kifejezni, mert a munka egy része nyomásváltozásban, egy része térfogatváltozásban is megjelenhet. Jövőre tanulni fogjátok, hogy ezek között szoros összefüggés van és egy zárt rendszeren belül ezek csak egymás rovására változhatnak. Addig is ha termodinamikai munkáról ejtünk szót, gondolj a gőzgépre.

Elektromos munka is van, de ez nem a villanymotor által végzett mechanikai munka, most hagyjuk is.

Körmozgás

Erőt kell kifejtenünk egy mozgó testre azért, hogy körpályán maradjon, ez a centripetális erő. Mivel a test mindig erre merőlegesen mozog, az erő irányába nem történik elmozdulás, tehát a centripetális erő nem végez munkát. **De:** ha a test haladását a körpályán valami lassítja (légellenállási erő stb.), akkor az egyenletes sebesség fenntartásához is erőt kell a testre kifejteni. A testet "tolni kell" a körvonalon. Ez az erő mindig a pillanatnyi mozgás irányába mutat, és a munkáját ugyanúgy kell kiszámítani, mintha egyenes pályán haladna a test. Vagyis ha egyszer körbeviszed a testet, akkor megtettél 1 kerületnyi utat, mindig az erőd irányába haladva, tehát munkát végzel.

Forgó mozgás munkája

A test egyenletes forgása ugyanolyan nyugalmi helyzet, mint az egyenes vonalú egyenletes mozgás, tehát a fenntartásához nem kell erő. De ha a forgás szögsebességét, egyidejűleg a test perdületét meg akarjuk változtatni, vagy éppen ha a forgást lassító erőt akarjuk leküzdeni, akkor forgató irányú erőt kell rá kifejtenünk. Egy motoros fűrész berántásakor a kábellel egy kereket forgatunk meg, ami áttételekkel a motor dugattyúját mozgatja. A vízimalom őrlőköveit az áramló víz mozgatja a nagy lapátkerék forgásban tartásával.

Mennyi munkát végzel egy test forgatásával? A hengerkerék mintájára lehet számolgatni az erőket és elmozdulásokat. De néha van ennél rövidebb út is. Nemsokára olvasni fogod, hogy a testen elvégzett munka energiát halmozhat fel a testben. Ilyenkor elég kiszámolnod a test *forgási energiájának meg-*

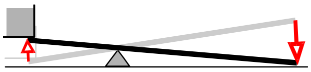
változását, és annyi a végzett munka, tök egyszerű. Ez akkor is beválik, ha az energián te a munkáddal változtatsz (felpörgeted vagy lelassítod), és akkor is, ha a forgó testtel végeztetsz munkát. Például úgy, hogy a jól megpörgetett lendkerék "magától" fel tud húzni egy vödör vizet. A forgó testtől kapott munka is változtat a test forgási energiáján, a szögsebességén, aminek a mérésével kijön az általa elvégzett munka. (Vagy kiszámolod a vödör emelésének munkáját a súlyából és a felemelés elmozdulásából. Ez az a helyzet, amikor te választhatsz megoldást. A feladatok gyakorlása segít ezt megszokni.)

Mit kell ismerned ahhoz, hogy az erő számolgatása nélkül is kiszámolhasd a végzett munkát?

Áttételes munkák

Az egyszerű gépek megváltoztatják a kifejtendő erők nagyságát és irányát, ezért nézzük meg az "áttételesen" végzett munka alakulását ezekre az esetekre.

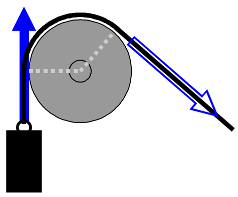
Emelő



Ha egy kétoldalú EMELŐvel emeljük meg a kocsit a kerékcseréhez, akkor a megemelés során munkát végzünk. (Amikor már csak tartjuk, az nem munka.) Ha a teherkar a fele az erőkarnak, akkor nekünk feleakkora erőt kell csak kifejtenünk, mint ami a kocsi egy az egyben való megemeléséhez kellene. Ha a kezdő- és véghelyzetet az ábrán megnézed, hasonló háromszögeket találsz, 1:2 arányúakat. Ebből az következik, hogy az emelő végét kétszer olyan hosszan kellett lefelé tolni, mint amennyit a kocsi emelkedett. Feleakkora erő kétszer akkora úton: az *ugyanannyi munka*! Vagyis az emelő kevesebb erőt tett szükségessé, de összesen az elvégzendő munka nem csökkent.

Ha csak annyit tudunk, hogy a teher súlya 1100 N, amit 15 cm magasra emeltünk, akkor a mi munkánk biztosan 165 J volt, mert csakis ennyi munkával történhet meg ez az emelkedés. Nem kell tudnunk, hogy mekkora volt az *általunk* kifejtett erő vagy az emelő felénk eső végének elmozdulása. **Ha az erőt áttételesen fejtjük ki a testre, akkor a mi erőnk adatai helyett a munka kiszámolható a test ellenerejének (pl. súlyának) és elmozdulásának szorzatként is.** Ez a tanulság jól jön még.

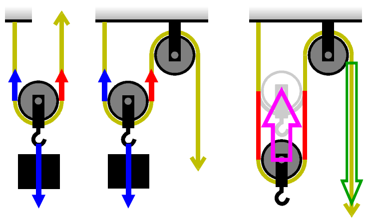
Állócsiga



A csigánál a kötelet másfelé húzzuk, mint amerre a test mozog. Ez teljesen igaz, de a kötél csak közvetíti az erőnket. Ha a kötelet meghúzzuk ferdén, a testre ható erő akkor is felfelé mutat, a kötélnek a kettő találkozásánál vett irányába, és ez munkavégzés szempontjából ugyanaz, mint ha közvetlenül mi magunk tartanánk a testet. Vagyis az állócsiga a munkán *semmit* sem változtat.

Mozgócsiga

A mozgócsiga is csigákból áll, de egyébként teljesen más dologról van szó.



Először nézzük meg az erőket. Az első a legegyszerűbb felállás, a kötél egyik vége rögzítve van, a másik végét mi tartjuk. A teher mozdulatlan, tehát az erők eredője nulla, vagyis a kötél két szárában fele-fele nagyságú erők ébrednek. Ezek összege ellensúlyozza a teher súlyát. A dologban a poén az, hogy a kötél egyik végét nem mi fogjuk, hanem rögzítve van a falhoz, állványhoz, fához, valamihez. Azt az erőt nem nekünk kell kifejtenünk.

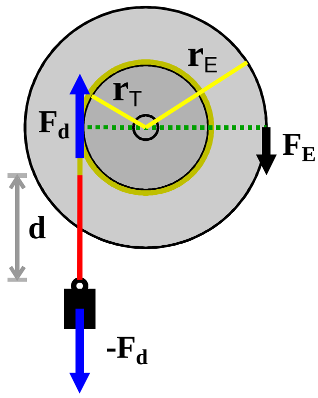
A második ábrán beiktattunk egy állócsigát, ami *semmi mást* nem változtat a helyzeten, mint hogy a kötél szabad végét más irányból, ez esetben lentről húzhatjuk. A gyakorlatban így szokták a csigákat elhelyezni. Az erők ugyanakkorák.

A mozgócsiga a kötél eresztésével-húzásával le-föl engedhető. Azt már tudjuk, hogy nekünk elég feleakkora erővel húznunk a kötelet. De nézzük meg, hogy milyen hosszan kell a kötelet húznunk ahhoz, hogy a mozgócsiga nagy nyíllal jelölt emelkedését elérjük. A mostani és a felhúzott állapot közötti magasságkülönbség annyi, amennyit a lila nyíl mutat. A kötél viszont most a *két* piros szakasszal hosszabb, vagyis kötélből *kétszer annyit* kell húznunk, mint amennyi az emelkedés. Ez egyformán érvényes az 1. és a 3. helyzetre.

A jelenség ugyanaz, mint amit a kétoldalú emelőnél láttunk. Feleakkora erővel húzhatjuk a kötelet, de cserébe kétszer olyan hosszúságon. A munka a kettő szorzata, igaz? Vagyis az derül ki, hogy a mozgócsigával az erőt csökkenthetjük, de a munka ugyanannyi marad. Ha nem így lenne, akkor a teher részben magától emelkedne fel csak attól, hogy köteleket kötözgetünk ide-oda. Csodák pedig nincsenek. Ha meg akarunk emelni valamit, akkor ahhoz mindig munka kell, és mindig ugyanannyi. Ennek ellenére ez a mozgócsiga nagyon hasznos eszköz a mai napig, mert többet ér az erő csökkentése, mint amennyi nehézséget okoz a kötél hosszabb húzása.

Mozgócsigából egyébként többet is össze lehet kombinálni csigasorrá, amivel tovább lehet osztani az erőt, de tovább szorzódik a húzandó kötélhossz. A mese szerint amikor Arkhimédész ráébredt az ebben rejlő lehetőségekre, lelkesedésében kijelentette, hogy ha valaki mutat neki egy fix pontot az űrben, ahová kikötheti a kötelet, az egész Földet meg tudja mozdítani.

Hengerkerék

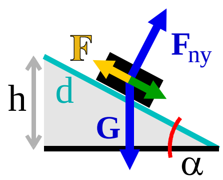


Az EGYSZERŰ GÉPEKnek erről a típusáról a 2. témakörben volt szó. A lényege az, hogy a munkavégző erő és az ellenerő különböző sugarú kerekek érintői mentén hatnak, ami az emelők elve szerint fordítottan arányos nagyságú erőket tesz szükségessé. A munkavégzéshez az erők nagyságán kívül erő irányú elmozdulás is kell: ha a kereket forgatjuk, akkor a kerülete mentén lemérhető a forgatás teljes úthossza. Ha a kerék kerülete 120 cm, 5,2-szer forgattuk meg 75 N erővel, akkor a munka 1,2×5,2×75, azaz 468 joule.

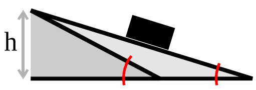
A munka egy teher felemelése. Ezt nem csak a munkavégző erő, hanem a teher alapján is számíthatjuk. Ilyenkor csak a teher és az erő között fennálló egyensúlyt veszünk alapul, nincs sebesség meg mozgás. A kerék peremére kifejtett erőnk a két sugár aránya szerint kisebb: $F_d \cdot r_T = F_E \cdot r_E$. Ha ezt nem érted, akkor légy szíves megtanulni az EMELŐK fejezetet a 2. témakörből.

Így ha a henger érintője mentén a teher **d** távolságon mozdult el, akkor a testen $\mathbf{F_d \cdot d}$ munka lett elvégezve. És ki más végezte volna el ezt, ha nem mi? Vagyis a munkát akkor is ki tudjuk számolni, ha nem a kifejtett munkavégző erő elmozdulását ismerjük, hanem a teher erejét és elmozdulását, mert a kettő ugyanannyi. Ez mértannal is kijönne, de így sem rossz.

Lejtő



A lejtőn végzett munka kiszámításában sem fogunk mást tapasztalni, mint eddig: a munkán nem tudunk spórolni. Annyit már magadtól tudnod kell, hogy a test nehézségi ereje (G) és a lejtő nyomóereje (F_{ny}) egy lejtőirányú eredő erőt hoznak létre, amit ellensúlyoznunk kell egy szintén lejtőirányú F ellenerővel. Ha ezzel az erővel feltoljuk a testet a lejtő tetejére, akkor az erőt az elmozdulás (d) irányába fejtettük ki a testre, vagyis a munka a lejtő hosszának és az erőnek a szorzata.



Konkrétabban: $F=-G \cdot \sin\alpha$, a lejtő hossza $d=h/\sin\alpha$, $W=F \cdot d$, a $\sin\alpha$ kiesik, a munka $-G \cdot h$! Ez azt jelenti, hogy a testnek a lejtőn feltolásához elvégzendő munka pontosan annyi, mint ha a testet egyszerűen felemelnénk, a súlyával ellentétes erővel elmozdítva h távolságon. A rakodómunkás megválaszthatja, hogy milyen meredekségű lejtőn akarja feltolni a testet. Ha laposabb a lejtő, akkor kisebb a G és F_{ny} eredője, kisebb a test tolásához szükséges erő is. De ha annak végül ugyanabba a **h** magasságba kell feljutnia (egy teherautóra, mondjuk), akkor a laposabb lejtő hosszabb utat is jelent. Ha tehát kisebb erővel toljuk a ládát, akkor hosszabb úton kell, a kettő szorzata a munka, ami a lejtő meredekségétől függetlenül ugyanannyi.

> Megjegyzés: Azért nem teljesen ugyanannyi. Hiszen a valóságban van súrlódás is, és ha hosszabb úton toljuk a testet, hosszabb úton kell a súrlódás ellen dolgoznunk, vagyis valójában kicsit több munkát kell belefektetnünk. A lejtő meredekségét ezért ésszerűen kell megválasztani, valamit valamiért áldozva.

Teljesítmény

A munka mennyisége szempontjából nem volt érdekes, hogy az mennyi idő alatt ment végbe. *Mennyiségét* tekintve mindegy, hogy azt a ládát cammogva és szuszogva viszed vagy futsz vele. A főnököd nyilván nem ilyen szemszögből nézné a helyzetet, őt érdekli az, hogy **a munka milyen gyorsan történik**. A teljesítményed érdekli, ami úgy számítandó ki, hogy ha az adott munkát rövidebb idő alatt végzed el, akkor nagyobb a teljesítményed.

A teljesítmény akkor kap gyakorlatias értelmet, ha valamilyen munkát huzamosan végzel, például egész nap ládákat cipelsz, ekkor annál rosszabb a teljesítményed, minél kevesebb ládát viszel el egy adott idő alatt. De a teljesítmény fogalma és képlete akkor is használható és értelmet hordozó, ha olyan munkát nézünk meg, ami pár másodperc alatt lezajlik.

A teljesítmény jele **P** (*power*), az értéke **egyenesen arányos a végzett munkával (W) és fordítottan arányos az ahhoz felhasznált idővel (t)**.

$$P = \frac{W}{t}$$

a mértékegysége a **watt**:

$$[P] = 1\ \frac{J}{s} = 1\ \text{watt (W)}$$

Láthatod, hogy a munka jele és a teljesítmény mértékegysége egyformán W, ezért külön gonddal memorizáld a téma képleteit. És újra mondom, ne betűk szerint menj vakon egy megoldásban, hanem a képletet tanuld meg szavakkal is, és figyelj oda, hogy a feladatban pontosan miről van szó.

A teljesítmény nem azt adja meg, hogy valaki mennyi munkát "teljesített", hanem hogy mennyit milyen gyorsan.

Nézzük meg a dolgot visszafelé is: ha van egy dízelmotorod, amelynek a teljesítménye 40 kW, és 5 percen át szivattyúzod vele a vizet, akkor a végzett munka 40 kW×300 s =1200 kJ =1,2 MJ.

$$W = P \cdot t$$

A munka fogalmának leírásakor számtalanszor volt szó arról, hogy a test elmozdul. Ha ezt a mozgást egy erővel hozzuk létre, vagy a hátulról tolt úthengerhez hasonlóan csak beleteszünk valamennyit, akkor a test *sebességében* benne van a munkánk. Rakjuk össze a három ide illő képletet:

$W = F \cdot s\,,\quad s = v \cdot t\,,\quad P = \dfrac{W}{t}$, és ezekből kijön a teljesítmény egy másik képlete:

$$P = F_v \cdot v$$

ahol az $\mathbf{F}_v$ a mozgás (elmozdulás) irányába kifejtett erő és $\mathbf{v}$ a mozgás sebessége. A képletből a MUNKA megbeszélésekor is látott elv szerint sejthető, hogy ha a sebesség vagy az erő nagysága változik, akkor új munkaszakasz kezdődik, amelyre a teljesítmény külön számítandó ki.

Hogyan következik egymásból a teljesítmény két képlete?

Amikor a teljesítmény ingadozik, a munka szakaszokra bontandó, akkor az egész folyamat összteljesítménye *nem összeadással* lesz kiszámítható, ahogy a munkánál tettük, hanem **átlagszámítással**. Ezt el lehet rontani. Lássuk:

1 óra alatt 20 kJ munkát végzel (ami nem sok), a következő 3 órában összesen 45 kJ munkát. Mennyi az átlagteljesítményed?

Először is vigyázz a mértékegységre, ugyanaz a helyzet, mint a km/h és m/s közötti átváltás esetében. A 20 kJ/h átváltva 20000 J / 3600 s, ami csak 5,56 W.

De most maradhatunk a kJ/h mértékegységnél. Az első óra teljesítménye 20 kJ/h, a következő három óráé 15 kJ/h. Van egy rossz és egy jó számítási módszer. A rossz: a kettőt átlagoljuk, (20+15)/2= 17,5 kJ/h. Ez *a teljesítmények számtani átlaga*, tekintet nélkül az így végigdolgozott idők arányára, ilyet a feladatok általában nem kérnek, és viszonylag kevés a gyakorlati haszna. Ez tehát a rossz.

Ehelyett a jó: az 20 kJ/h-t 1 órán át, a 15 kJ/h-t három órán át tartottad. Ha erre is tekintettel vagy, akkor tényleg az átlagteljesítményt (vagy átlagos teljesítményt) számolod ki:

$$P_{átl} = \frac{20\ kJ/h \times 1\ h + 15\ kJ/h \times 3\ h}{1\ h + 3\ h} = \frac{65\ kJ}{4\ h} = 16{,}25\ kJ/h = 4{,}51\ W$$

$$P_{\text{átl}} = \text{átlagteljesítmény} = \frac{\text{összes munka}}{\text{összes idő}}$$

Fogyasztás

Ezzel a viszonylag keveset használt fogalommal az a baj, hogy kétféle jelentésben is használják. Nemsokára látni fogod, hogy a munkavégzéshez mindig a valahol felhalmozott *energiából* kell elhasználni valamennyit. Az energia mértékegysége a munkáéval azonos: joule.

A **fogyasztás** az egyik jelentésében a **munka** párja, és a mértékegysége **joule**. Azt fejezzük ki vele, hogy egy bizonyos munka elvégzésekor összesen mennyi energiát használtunk el. Annak ellenére, hogy a munkát végző rendszer valóban fogyasztott energiát, fogyasztás helyett jobb lenne **energiafelhasználás**nak hívni, elkerülve a félreértést.

A villanyóra, a mérőműszer, ami alapján az áramért fizetünk, kWh mértékegységben jelzi ki az értéket. A kilowattóra kW·h-t jelent. A watt (és kilowatt) a *teljesítmény* mértékegysége (J/s), ezt visszaszorozzuk idővel, aminek az eredménye munka (P·t=W). A munka mértékegysége viszont a joule. Számítsuk át:

$$1\,\text{kWh} = 1\frac{\text{kJ}}{\text{s}} \cdot 3600\,\text{s} = 3{,}6\,\text{MJ}$$

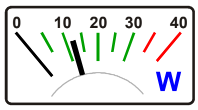
Ellenőrizd az utolsó témakör PREFIXUMOK fejezetében a mértékegységek nagyságrendjét!

Vagyis a villanyóra munkát, illetve az ahhoz felvett energia összegét jelzi ki. A két leolvasás között elfogyasztott energia árát kell mindig kifizetni.

A **fogyasztás** a másik jelentésében a **teljesítmény** párja, és a mértékegysége **watt**. Ez az időegység alatt felhasznált energia mennyiségét fejezi ki. Teljesítménynek akkor hívjuk, amikor a munkát végző szempontjából nézzük az időegység alatt elvégzett munkamennyiséget. Ha azt mondjuk, hogy egy villanymotoros szivattyú 1200 W teljesítményű, akkor ezt úgy szoktuk érteni, hogy másodpercenként el is végzi az 1200 J munkát. Fogyasztásnak pedig akkor szoktuk hívni, amikor azt figyeljük, hogy az energiából ez a munka időegységenként mennyit fogyaszt el. Ha 1200 W a villanymotor *fogyasztása*, akkor elhasznál 1200 J munkaerejű áramot másodpercenként, de talán a felvett energia egy része az alkatrészek súrlódása stb. miatt haszontalanul fogy el. Lehet, hogy a szivattyúmotor valódi *teljesítménye*, a ténylegesen elvégzett munka alapján, csak 950 W lesz, a kettő aránya a hatásfok.

Ha megkérdezik, hogy a szivattyúnak mennyi a fogyasztása, akkor nem fogja senki azt mondani, hogy 475110 joule, merthogy a szivattyú az üzembe állítása óta összesen ennyi energiát használt fel. Erre a kutya sem kíváncsi. Azt fogják mondani, hogy pl. 1200 watt, vagyis *másodpercenként* 1200 joule energiát fogyaszt. Egy dízelgenerátor fogyasztására esetleg azt mondja valaki, hogy óránként fél liter, autóra pedig hogy 100 kilométerenként 7 liter. Szóval ha nem is mindig idő szerint, de mindig valami egységre átlagolva mondjuk. Így aztán ha kerülni akarjuk a félreértést, hívjuk ezt a mennyiséget **átlagfogyasztás**nak.

Amikor egy feladatban megadják egy villanyégő *teljesítményét*, az elég bénán néz ki, mert az égőtől végkép nem várunk *munkát*, csak hogy világítson. Igazából nem is a munka érdekel bennünket, hanem az általa fogyasztott energia. Ilyenkor igazán indokolt azt mondani, hogy az (átlag)fogyasztása pl. 60 watt. (Ami percenként 3,6 kJ felvett energiát jelent, percenként 1 Wh.)



Egy olyan műszeren, ami a munkához felhasznált energiát számolja (joule), a mutatott érték mindig növekedik. Az átlagfogyasztást (watt) mérő műszeren a kijelzett érték ingadozik. Ha egy szerkezet *egyenletesen* használja fel az energiát a munkavégzéshez, akkor az első műszer egyenletesen pörög, a második pedig egy értéken áll.

Mit tehetsz azért, hogy ne értsd félre a feladatot, és ne értse félre a tanár a te megoldásodat? A probléma az, hogy fogyasztásként összes munkára vagy időszaki teljesítményre gondolnak. *Figyeld a feladat értelmét*. Ki kell derülnie belőle annak, hogy időegységenként (1 másodperc, óra, nap stb.) számítandó energiafelvételt adnak meg vagy éppen kérdeznek, vagy *összesen* felvett energiát. Figyeld gondosan, és használd helyesen a mértékegységeket is, összes energiafelvétel J, kJ, Ws, Wh, kWh, átlagfogyasztás W, kW.

Hatásfok (munka)

A mozgást akadályozó erők olyan többleterő kifejtését teszik szükségessé, ami valójában veszteség: a motorcsónak egyenletes sebességének megtartásához jókora motort kell járatnunk, a kocsink is elég hamar leáll a legsimább úton is, ha üresbe tesszük, elvéve tőle a motor erejét.

Az elvégzett munka egy része tehát ezeknek a hatásoknak az ellensúlyozására megy el, és csak a maradék munka termel valódi eredményt. Vagy másképp nézve: ha megadott mennyiségű munka elvégzését kívánjuk látni, akkor annyival többet kell belefektetnünk, hogy a veszteség után is maradjon annyi, amennyi kell.

A munka hatásfoka az az arányszám, amely azt mutatja meg, a befektetett munka mekkora része válik hasznos munkává. Zárt rendszeren belül a hatásfok legfeljebb 1.

1-nél nagyobb hatásfok azt jelentené, hogy több munkát végzünk el, mint amennyit dolgozunk, ami fizikai szempontból sajnos lehetetlen. Hacsak nem veszünk igénybe egy gépet is, viszont akkor a rendszerünk *nem zárt*, mert így egy külső tényezőt is beengedtünk a játékba.

$$\eta = \frac{W_h}{W_ö}$$

ahol η (éta) a hatásfok jele, W_h a hasznos munka, $W_ö$ pedig az összes befektetett munka. A hatásfok egy arányszám, mértékegysége nincs. Az értelmezhetőséghez a $W_ö$ értékének 0-nál nagyobbnak kell lennie.

összes munka = hasznos munka + veszteség

Egy kötelet húzva vizet emelsz ki a kútból. Az erő 240 N, az út összesen 82 m. Ezzel 292 litert húztál 6 méter mélyből. Mennyi a munkád hatásfoka? A végzett munka $W_ö$=240·82=19680 J. 292 l víz súlya 2864 N, a hasznosult munka W_h=2864·6=17181 J, a hatásfok η=0,873.

A targoncával elvégeztél 710 kJ munkát 14 perc alatt. Mennyi áramot fogyasztottál, ha a gép hatásfoka 42%? Az elfogyasztott áram végezte el az összmunkát. A hasznosult munka W_h=710 kJ. A hatásfok η=0,42. $W_ö$=W_h/η=1690 kJ. **Mennyi volt a targonca átlagfogyasztása?** Nem mennyit fogyasztott összesen, hanem a fogyasztás kell, a teljesítmény párja. P=$W_ö$/t. Az idő 14 perc, t=840 s. P=2012 W.

Emlékezhetsz, hogy a munkába csak az az erőkifejtés számít bele, amit a test elmozdítására fordítunk, a testre az elmozdulása irányában fejtünk ki. A MUNKA fejezetben sokat olvashattad, hogy ha nagy erőt fejtünk ki, akkor is lehet, hogy a végzett mechanikai munka kevés vagy akár nulla. A hatásfok nem fejezi ki az *erő és a végzett munka* viszonyát, csakis **a hasznosult munka és a valóban végzett munka arányát** jelenti. Ha a ládával a kezünkben álldogálunk, annak az erőkifejtésnek *nem a hatásfoka* nulla, hanem a végzett munka nulla, aminek nem is lehet hatásfokáról beszélni.

Ahogy a munka alapján számíthatunk hatásfokot, úgy a teljesítmény alapján is lehetséges. *Ha* a teljesítményt, mint a másodpercenként valóban elvégzett, hasznos munkát, és a fogyasztást, mint a másodpercenként a munkához felhasznált munkakapacitást (energiát) tekintjük, akkor a hatásfokra ez a meghatározás is adható:

$$\eta = \frac{\text{teljesítmény}}{\text{fogyasztás}}$$

Örökmozgó

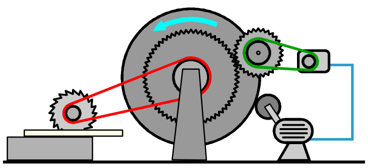
Rövidesen olvashatod, hogy ahhoz, hogy egy eszköz munkát végezzen, energiát kell adnunk neki, és ennek az energiának az előállításához valami másféle munkát kell elvégezni. Például egy kötélen felhúzunk egy hatalmas kalapácsot, aztán elengedjük, és az ráesik egy nagy fémdarabra. A kovácsok évezredek óta használnak ilyen eszközt a fémek formálásához. **A kalapács munkát végez, de magától nem emelkedik fel, ehhez kell valaki vagy valami munkája.**

Sokan ábrándoztak arról, hogy de jó lenne, ha az a kalapács valahogy mégiscsak munka nélkül emelkedne fel, így aztán kitaláltak mindenféle szerkentyűket mindenféle munkák végzésére. Ezek egy része okos találmány, kihasználja a tűz, víz, szél, nap stb. erejét, közvetlenül vagy közvetve, ezer efféle gép működik körülöttünk. Egy másik részük működik, de nem éri meg használni, olyanok is vannak, amelyek nem is működnek, mert bénaságok. És van még egy kategória: a hülyeség. Nem is gondolnád, hogy mennyi hülyeség kapott már szabadalmi védettséget a világ országaiban, mert azt nem vizsgálják, hogy használható-e, csak hogy volt-e már előtte ugyanilyen.

A hülyeség egyik klasszikus típusa az ún. elsőfajú örökmozgó, latin nevén *perpetuum mobile*. Ez nem egy bizonyos szerkezet neve, hanem inkább egy elvé, amelynek a megvalósítására már rengeteg szerkentyűt agyaltak ki. A munka hatásfokát már megbeszéltük, így aztán érted, ha azt mondom, hogy az örökmozgó olyan gép, amelynek a hatásfoka 1-nél nagyobb. Energianyereséges gép.

Használjuk az előbbi egyszerű példát. A kovácsműhelyben a kalapács súlya 300 N, mi egy csigán átvetett kötelet 300 N-nal húzunk a felemeléséhez. De mi a kötelet 1 méternyit húzzuk, a kalapács pedig felemelkedik másfél méternyit. Nincs csigasor, gőzgép, rakéta, hanem csak így egyszerűen. A munkánk hatásfoka 1,5. Hát ezt akarnák megcsinálni a lelkes, de persze meg nem értett zsenik. Mivel ez a dolog nyilvánvalóan lehetetlen, ezért mindenféle kerekek, súlyok, himbák, emeltyűk, rugók, motorok, mágnesek bonyolult rendszerét találják ki, kijelentve, hogy végül ez a szerkezet több munkát tud elvégezni, mint amennyi energiát mi beleteszünk. Pedig valójában csak annyira rafinált szerkezetet találtak ki, hogy már ők maguk sem értik egészen, és ezért elhiszik, hogy megtalálták a titkot.

Szögezzük le: *nagyon jó lenne*, a világtörténelem legnagyobb eseménye lenne, ha valakinek sikerülne ilyesmit feltalálnia. Az illetőt egyidejűleg császárrá, szentté és istenné avatnák, megvásárolhatná az egész Földet és valóságshow-kba hívnák meg. Csakhogy eddig még egy ilyen találmány sem működött. Voltak persze csalók is, akik úgy próbáltak jutalmat kapni, hogy a szerkezetbe titkos motort vagy más erőforrást szereltek. Sok olyan alak is volt már, aki megmutatta vagy leírta a gépet, de nem engedte megvizsgálni, és az elvet sem volt hajlandó elárulni. Biztos tudtak jobbat is, mint az isten-császárság.



Az örökmozgók legjellegzetesebb válfaja a visszacsatolásos, amelyik önmagát is meghajtja. Az ábrán látsz egy ilyet. A nagy lendkereket megforgatjuk. Az egy ékszíjjal (zöld) megforgat egy áramgenerátort, amely ellátja árammal azt a motort, amely megforgatja a lendkereket, amely az ékszíjjal megforgatja a generátort… És így tovább, körbe-körbe. Nekünk nem is kell a lendkereket tovább forgatnunk, mert forgatja a villanymotor. Az "örökmozgó" nevet ezért kapta az ilyen szerkezet: a beindítás után nem áll le többet.

Figyeld meg jól: a rendszerbe a beindítása után nem kerül be sem külső erő, sem munka, sem energia, a rendszer önmagát táplálja, ez az ilyen találmányok lényege. Persze be lehetne iktatni húsz különféle áttételt is, játékok és tévéműsorok témája mindenféle poénos láncolat felépítése. De egy félig üres pohár nem telik meg csak attól, ha a vizet bármilyen komplikált módszerrel az egyik pohárból a másikba öntögeted. Ez a fenti rendszerre is igaz.

Fontos: a *visszacsatolás* fogalma egyáltalán nem hülyeség, csak az, hogy itt nem kiegészíti, hanem teljes egészében helyettesíteni akarná a külső energiaforrást.

Találj ki egy meggyőzőnek tűnő örökmozgót, vagy keress leírást egy ilyenről, és bizonyítsd be, hogy miért *nem* működik örökké. Kiselőadás is kihozható belőle.

A szerkezet a terv szerint fenntartja a sajt mozgását, de ennek még nem lenne semmi haszna. A haszon az ábrán az lehetne, hogy a piros ékszíjon át megforgat egy fűrészgépet, mondjuk. Tehát a szerkezetnek mindenképpen **több munkát kellene elvégeznie**, mint amennyi munka az *eredetileg teljesen mozdulatlan* rendszerbe belekerült.

Mi a probléma ezekkel a tervekkel, gépezetekkel? A *veszteség*. A világ összes mérnökének eddigi egybehangzó tapasztalata szerint *nem létezik* olyan erőátviteli módszer – ez még a legszimplább kétkarú emelőre is igaz –, amelyben az erő utolsó csöppje is oda kerülne, ahová szánjuk. Még az emelő rúdja is meghajlik egy egész kicsit, még ott is eltűnik egy pici munka. Ahol mozgás van, forgás, gurulás, csúszás, ott pedig *mindig* van súrlódás, közegellenállás, ami a munka hatásfokát valamennyivel az 1,000000… alá nyomja. A vezetékben keringő áram erejét csökkenti a vezeték ellenállása, a gőzgépben a munkahenger a hő egy részét szétsugározza és így tovább. Amíg ezeket a zavaró tényezőket nem sikerül pontosan 0-ra leszorítani, addig nem lesz veszteségmentes munka. *És akkor még nem is beszéltünk a remélt nyereségről*, ugye, pedig az lenne a lényeg.

Óriási elméleti forradalom lenne, ha egy picike masinát tudna valaki csinálni, amely nyereséges lenne, bár addig nem sok gyakorlati hasznát látnánk, amíg nem lehet vele fát is hasogatni. Azok a kis kísérleti játékszerek, amelyekben pillekönnyű kerekeket látunk mozogni, látszólag minden erőbevitel nélkül, netán "pszichikai energiák" bevetésével, úgy néznek ki, mintha győznének a fizikai törvények fölött. Pedig bizony azok mozgását is okozhatja a szerkezetet tartó kéz melege, elektrosztatikus töltése, vagy például a napfény leheletfinom nyomása, és amíg ez ki nem derül, addig játékszerek is maradnak.

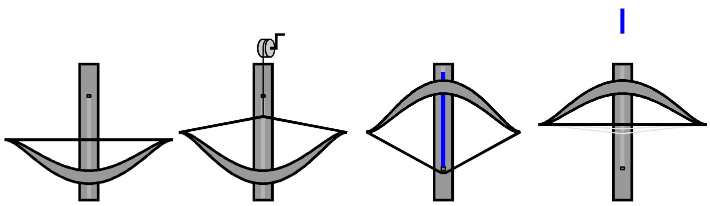
A következő fejezeteket a könyv teljes változatában olvashatod:

Potenciális energia [redacted]

A testekben tárolódó energia egy része olyan, hogy nincs közvetlenül látható jele, és az energia ezekben a testekben csak *lehetőségként* van jelen, tehát csak potenciálisan. (A név másik jelentése később szóba kerül.) Kinyerhető belőle energia, munkát tudunk vele végeztetni, de az energia kihasználatlanul maradhat hosszú időn át, el nem vész, és bármikor, kis adagokban is felhasználhatjuk. A 'potenciális' szó jelentése: 'rejtett, lappangó, lehetőségként létező'. A potenciális energia kifejezést sokszor mindössze a *helyzeti energia* szóval azonosként kezelik (lásd később), de valójában **többféle** "lehetőségként létező" energiafajta is ebbe a csoportba tartozik. Ha neked másképp tanítják, akkor is használhatod ebben az értelemben, de a tanárnak ne felejtsd el hozzátenni, hogy te a helyzeti, rugalmassági és más nem kinetikus mechanikai energia összefoglalására használod.

A potenciális energia **nem kinetikus**, ebben az esetben nem a mozgás tárolja az energiát. Úgy is mondhatjuk, hogy **a potenciális energia *statikus***.

A potenciális energiára megjegyezhető alappélda a felhúzott számszeríj.* A felhúzásához munkát kell végeznünk rajta, puszta kézzel, vagy fejlettebb típusoknál egy emelőszerű eszközzel, máskor pedig egy csigás (pontosabban hengerkerekes) szerkezettel. Az utóbbi két esetben a felhúzáshoz nagyobb erőt tudunk kifejteni, tehát több energiát tudunk betáplálni. A csigás módszernek megvan az az előnye is, hogy nem kell egyetlen lendületből végigvinni a felhúzást, hanem az lépésenként is befejezhető. A munkát az íj teste "veszi fel" azzal, hogy *rugalmas alakváltozást* hozunk létre rajta, ebben tárolódik az íj potenciális energiája (nem a húr nyúlik meg). A felhúzás után egy kis pöcök megtartja a húrt abban a helyzetben, az íj teste megmarad a deformált, az eredeti helyzetébe visszaállni próbáló alakban, telve energiával, kilövésre készen. Ha a pöckö elvesszük húr útjából a ravasz meghúzásával, akkor az íj visszapattan a kezdeti alakjába, a húrt is visszarántva, és ha a húr elé odateszünk egy nyílvesszőt, akkor azon az íj munkát végez, kilövi.



A számszeríjban a közönséges íjhoz vagy csúzlihoz képest az a jó, hogy a kifeszítéséhez szükséges munkát nem kell közvetlenül a kijövés előtt elvégezni. Felhúzzuk, reteszeljük, és *elvileg* akár napok (vagy évmilliók) múlva is szabadjára engedhetjük. A gyakorlatban ez csak azért nem lehetséges, mert a deformált fa és fém szerkezete lassan átalakul egy kicsit, engedve a nagy erőnek, így végül rövidebben és gyengébben csapódik vissza az íj húrja, kevesebb munkát tud végezni a nyíl felgyorsítása érdekében. A kezdetben bevitt energiának néhány nap elteltével egyre nagyobb része kezd rugalmatlan alakváltozásban visszanyerhetetlenné válni. Újabb példa arra, amikor az energiatároló "szivárog".

Mi tárolja a felhúzáskor belevitt energiát a számszeríjban?

Az ENERGIATÁROLÓkról már olvashattál egy önálló fejezetet, most még egyszer összeszedem a fontos tulajdonságait:

1. A szerkezeten végzett munkával beletáplált energia tárolható, viszonylag huzamos ideig. A betáplálás történhet jóval a felhasználás előtt.
2. Az energia betöltését végezheti más, mint aki/ami aztán az energiát hasznosítja.
3. A betöltött energia (például a számszeríj esetében) szállítható, tehát a felhasználás helye lehet máshol, mint a betöltés helye.
4. Az energia bevitele történhet kis adagokban is (például a csigás szerkezetet végül kis lépésekben tekerve), ezek az adagok végül *összeadódva* tárolódnak.
5. Az energia kiürülésének a sebessége, az általa végzett munka ideje lehet egészen más, mint a bevitelének a sebessége. (Gyorsabb is, lassabb is.)
6. Az eszköz a kiürítés után újra feltölthető energiával, újabb munkát végezve rajta.

Nem mindegyike teljesül minden energiatároló eszköznél, például a szállíthatóság, de ettől még az általános elvi szabályok közé vehető. Az újratöltés a gyakorlatban néha túl vesződséges – például a sziklát visszagörgetni a hegy tetejére –, de elméletileg mindig lehetséges.

A potenciális energiával rendelkező rendszer energiatárolónak tekinthető.

A potenciális energia kinetikus energiává, mozgássá alakítható át.

* A számszeríj nevének, ez érdekes, nincs köze a számhoz, szerhez, szerszámhoz és még az íjhoz sem. Igazából valamilyen szláv nyelvből ered, a "szamo sztrelij" eltorzult, "megmagyarított" ejtéséből, ami annyit jelent, hogy "magától lövő". Mint az automobil, ami "magától mozgó".

Potenciális energiája *a felhúzott* íjnak van. Ilyenkor az energiatároló valamennyire *fel van töltve*. A leeresztett, kilőtt íj semleges, "kiürített" állapotú.

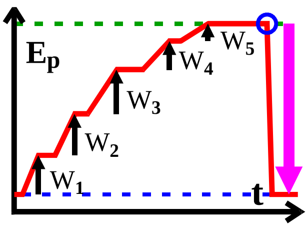
A rendszerben tárolódó potenciális energiát munkával kell létrehozni, mint mindig. A számszeríjat munka végzésével kell felhúzni, és a befektetett energiát kapjuk vissza tőle. Ezért a munkatétel ebben az esetben is érvényes:

Egy test mechanikai potenciális energiájának növekedése egyenlő a testre ható erők munkáinak előjeles összegével. Negatív munkaösszeg a potenciális energiát csökkenti. A tárolt potenciális energia akkor is csökken, amikor munkát végez.

A potenciális energia kinetikus? És mechanikus?

A bevitel és felhasználás **sebessége** több példán is illusztrálható. Az íjat lassan húzzuk ki, de az gyorsan ugrik vissza a kezdeti állapotába, és ezt a gyorsaságot puszta kézzel nem is érhetnénk el, a nyilat nem tudjuk ilyen gyorsan eldobni. A pár másodperc alatt felhúzott órában levő rugó viszont egy-két nap alatt jár le teljesen, tehát ennyi ideig tart, amíg a beletett energiát visszanyerjük, igen kis adagokban, szakaszosan, az óraszerkezetben végzett munka alakjában. Egy PET palackból fabrikált rakétában mi állítjuk elő a túlnyomást, adagonként belepumpált levegővel, utána az így belevitt potenciális energia szinte egy löketben szabadul fel belőle (az akció–reakció elvén működő mozgást létrehozva). Potenciális energiát halmozunk fel akkor is, amikor felballagunk a domboldalra, hogy aztán mozgásként kapjuk vissza, amikor a szánkóra ülünk.

Az energia betöltését végezheti "más" is: ez természetesen nem csak másik embert jelenthet, hanem bármilyen munkavégzésre képes dolog, állat, gép, anyag, természeti jelenség.



A diagramon azt látod, ahogy egy katapultot, egy hajítógépet felhúznak. (A képen a szerkezet felhúzott állapotban látható.) A vízszintes tengelyen az idő, a függőlegesen a potenciális energia van. A kezdeti helyzetben a kilövőkar a kanállal a felső, *majdnem* feszítetlen állapotban van. Ekkor is fel van húzva valamennyire, épp csak annyira, hogy a rúdja a keresztrúdhoz nyomódjon, és ne dőljön jobbra-balra. Ezt a helyzetet *előfeszítettség*nek hívjuk. A potenciális energia nem nulla, ebből a kezdeti értékből indul, és a kilövés után ugyanide fog visszaesni, mert a kilövőkar ugyanúgy előfeszített állapotban fog megállni.

A csapat öt húzással állítja a kart megfeszített, kilövésre kész helyzetbe. Az első húzással W_1 munkát végeztek, ennyivel növelték a katapult energiáját. A diagram szerint mindegyik húzás egyre nehezebb lehetett, mert egyre lassabban érnek véget. (Hasznos képesség, ha egy diagramot nézve rekonstruálni tudsz egy műveletsort.) Aztán egy ék mindig megtartja a hengerkereket, amíg a csapat új fogást vesz rajta. A harmadik húzás után láthatóan szusszantak egy kicsit. Az utolsó húzás már rövidebb volt, a felhúzás elérte a kívánt mértéket, a katapult energiatároló kapacitásának határát. Aztán betették a követ (vagy tehenet)* a kanálba, és a kör jelzi azt a pillanatot, amikor a rögzítőhorgot kioldották. A kar meglendül, és a gép a vaskos kötélrugó energiáját a lövedék (és a kar) mozgatására használja fel. Nem egyetlen pillanat alatt, mert az nem is lehetséges, hanem nagyon rövid idő alatt.

Az energia betáplálásához végzett munka időben elhúzódva, öt külön adagban történt meg, mindig a nyíllal jelölt mennyiségű munkát végezve. Nem tudjuk, hogy mekkora *erő* kellett hozzá, de a katapult energiája ennyivel nőtt, tehát az emberek által végzett hasznos munka is ennyi volt, ez biztos.

A lövedék mozgatására szánt energiát jóval lassabban és adagonként gyűjthettük össze, a katapult rugójában. A szerkezetet felhúzó emberek hiába képesek a szükséges energiát összerakni, nem tudnák azt egyben, a szükséges hosszú úton és kellően rövid idő alatt munkára fogni. Ezért van nagy gyakorlati jelentősége a mechanikai energia *felhalmozására és gyors felhasználására* kitalált eszközöknek.

Tudsz még ide illő mechanikus példát mondani, nem fegyvert? Lassú feltöltés, gyors felhasználás.

A potenciális energia a katapultnál *nem nulláról* indult, és a befektetett munka sem onnan kezdődik, hanem egy alsó (kék) *energiaszintről* eljuttatva a katapultot egy felső (zöld) energiaszintig. A kilövéskor a két szint közötti összes munkamennyiséget kapjuk vissza egyetlen gyors mozdulatban. A felhúzáskor elért potenciális energiát pontosan nem ismerhetjük, *csak az alsó szinthez viszonyított különbségét*. Emlékszel még a RUGÓERŐ fejezetben a vasúti kocsi rugójának mérésére? Ott is csak akkor tudhatnánk meg a rugó tényleges erejét, ha a kocsit szétszednénk, viszont tudjuk az erők különbségét két állapot

---

* Az alapműveltségnek van egy minimuma.

között. Ahhoz hasonló a helyzet itt is, így az energia helyett **csak az energia *változását* tudjuk megadni**, a végzett munkáink összegeként:

$$\Delta E_p = \sum_{i=1}^{5} W_i$$

Látni fogod, hogy épp azért, mert magát az energiát, annak számszerű értékét nem mindig ismerjük, csak a belefektetett munka által létrehozott energiakülönbséget, a potenciális energiát mindig valamihez viszonyítva számoljuk.

Minek a mértékegységével azonos az energia mértékegysége?

A mechanikai potenciális energiának mi négy fajtáját fogjuk részletesebben megnézni: **a magassági, a helyzeti és a rugalmassági energiát, valamint a mágnes potenciális energiáját**.

A következő fejezeteket a könyv teljes változatában olvashatod:

Energiaszintek
Magassági energia
Konzervatív erőtér
Helyzeti energia
Rugalmassági energia
Mágnes
Potenciális energia és kinetikus energia
Átalakulási példák

Kozmosz

Hogy ne nézz hülyén, ha egy centauri útbaigazítást kér tőled.

A csillagászat valószínűleg a legősibb olyan tudomány, amelyben módszeres megfigyeléseket végeztek. A fontosságát az adta meg, hogy az élelemgyűjtési, később a mezőgazdasági munkálatokat a már bevált ütemterv szerint kellett minden évben megismételni. A munkák megfelelő időzítése és a termés mennyisége döntött a fagyos vagy aszályos időszak túlélése és az éhenhalás között. A napok számlálása és főleg *a naptár helyességének ellenőrzése* kőkori eszközökkel nem is olyan egyszerű feladat, és szükségessé tette a szabályok megtalálását.

Mindezeken túl az ember az életének pontosan a felét napnyugta és napkelte között tölti, és egy olyan korban és vidéken, ahol egy kis tűzrakás jelenti a közvilágítást, a csillagos égbolt látványa szó szerint letaglózó élmény. Még ma is az, ha sikerül valahol igazi sötétségben megnézni. Így aztán az égitestek, és a bennünket körülölelő Világegyetem természetes módon foglalkoztatta az emberek kíváncsiságát, és ösztönözte mesék kitalálására is. A látvány magasztossága könnyen megszülte a hitet az égi istenekben és az égi jelenségeknek az életünket befolyásoló erejében is, ezt a hitet még ma is sokan átérzik.

Az ember nem tudta megmagyarázni az égbolton láthatókat, ezért megpróbálta azzal az uralma alá hajtani, hogy gondosan feltérképezte magának. A hozzánk és a Naphoz legközelebb levő öt bolygó távcső nélkül, szabad szemmel is látható az égbolton, külön fejtörést adva azoknak az őskori és ókori tudósoknak, akik a "vándorcsillagok" létezésére befogadható magyarázatot, a mozgásuk előrejelzésére pedig – ami az ismeretlentől való rettegést csillapítja – valamilyen rendszert kerestek.

A későbbi korok csillagászai is hálásak lehetnek az első babilóniai csillagász-papok által megkezdett, majd más nagy kultúrájú népek által szaporított részletes megfigyelésekért, amelyek a hozzájuk tapadó babonák ellenére is pontos adatokat rögzítettek az utókor gondolkodói részére. Ezek segítségével nemcsak elméleti világmodellek felvázolása vált lehetővé, hanem az a nagyon fontos tanulság is levonható volt, hogy *a csillagos ég nem változatlan*.

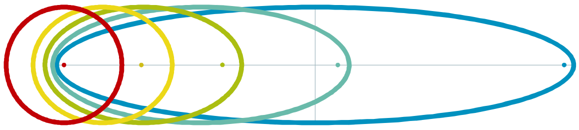
A Kepler-törvények

A kora középkori európai kultúra annak idején az ókori görög filozófusok különféle elméletei közül **Ptolemaiosz** földközéppontú (geocentrikus) kozmikus modelljét vette át. Ezért bárkit is hibáztatni fölösleges, mert *tényleg úgy néz ki*, hogy a Nap, a Hold, minden a Föld körül mozog, a csillagok egy nagy kristálygömbön levő fényes pontok, a Föld pedig mozdulatlan, hiszen ha mozogna, nyilván éreznénk is. Az ókori csillagászok és középkori követőik gondja az volt, hogy a vándorcsillagok közül kettő (Mercurius és Venus) a Napot egy ideig megelőzi, aztán követi, szimmetrikusan. A másik három pedig az égbolton való haladásában néha visszafordul egy időre, majd egy hurok megtétele után folytatja az útját. A mindenki által ellenőrizhető tényhez a korábbi modell bonyolításával próbáltak magyarázatot alkotni, a Föld körül keringő kisebb gömbökkel, körökkel, de az egyre pontosabb megfigyelések által feltárt eltérések egyre nehezebben tarthatóvá tették az elméletet. A keresztény egyház sajnos sok éven át akadályozta, sőt, megtorolta az újfajta magyarázatok közzétételét, a geocentrikus világmodellt tartalmazó Biblia szavahihetőségének és az egyház szilárd hatalmának védelmében.

A német-lengyel **Kopernikusz** (eredetileg Niklas Koppernigk), a görög **Arisztarkhosz** modelljét megvizsgálva több tanulmánya után végül 1543-ban, halála előtt megjelent főművében a napközéppontú (heliocentrikus) világmodell mellett állt ki, ami sokkal egyszerűbb magyarázatot kínált az égbolton megfigyelt jelenségekre. Eszerint a bolygók, *így a Föld is* körpályákon keringenek a Nap körül. A botrányos az elméletben, a Biblia tanításának megkérdőjelezésén kívül, az volt, hogy a Földet "lefokozta", a többihez hasonló, egyszerű bolygóvá minősítette, a többit pedig a Föld mellé emelte. Ez felvethette azt a hátborzongató gondolatot is, hogy az égen a csillagok között mozgó "planéták" nem puszta fénypontok, hanem a Földhöz hasonló, távoli világok, pedig a Biblia ilyesmiről még csak szót sem ejt.

A látottakat megmagyarázó modell egyszerűbb lett, de a pontosságban még mindig voltak hiányok, a bolygók a számításokon alapuló előrejelzésekhez képest hol siettek, hol késtek. A bajor **Johannes Kepler** a modellt továbbfejlesztette annak az észrevételével, hogy a pontatlanság megmagyarázható, ha a bolygópályákat kör helyett ellipszisekkel helyettesítjük. Az új elmélet részleteit 1609-ben és 1619-ben jelentette meg. A **Kepler-törvények** ma is érvényesek, és később alapot adtak mindenféle más keringési helyzet elemzéséhez is.

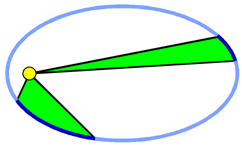
I. Minden bolygó olyan ellipszis alakú pályán kering a Nap körül, aminek az egyik fókuszpontjában a Nap van.



Az ellipszis fókuszpontjának definiálása itt nem fontos, az ellipszisnek két szimmetrikus fókuszpontja van, a nagytengelyén. Az ábrán példák láthatók, az egyik fókuszpont mindegyikénél a kör középpontja alá van igazítva. A kör olyan speciális ellipszis, amelynek a két fókuszpontja egybeesik. Minél elnyúltabb az ellipszis, annál közelebb van a fókuszpontja a nagytengely végpontjához. A bolygók ezeken a pályákon láthatóan mindenféle súrlódás, ellenállás nélkül haladnak, feltehetően a végtelenségig, tehát a közöttük levő térnek üresnek kell lennie, a tudósoknak már régóta ez volt a gyanúja. (Akik nem tudták elképzelni a levegő nélküli, teljesen üres űrt, azok egy speciális közeg, az éter (aether) jelenlétében hittek, ami anyag, hullámok is tudnak terjedni benne, de mégsem lassítja a bolygókat.)

Ma már ezt mind tudjuk, de akkor még a távcső is vadonatúj találmány volt, és Galilei volt az első, aki az égbolt megfigyelésére használta, 1610-ben, újabb drámai ismereteket szerezve, többek között a Hold felszínéről és a Jupiter addig sosem látott, nem is sejtett holdjairól.

II. A bolygó vezérsugara azonos idő alatt azonos területet súrol.



A vezérsugár a Napot és a bolygót összekötő vonal, ami a bolygóval együtt mozog, adott idő alatt végigsúrolva az ellipszis egy cikkét. A törvény szerint a két cikk azonos területű, ha a hozzájuk tartozó pályaívet a bolygó azonos idő alatt teszi meg. Ebből az következik, hogy a bolygó a Naphoz közeledve egyre gyorsul, elhalad mögötte, aztán lassulni kezd, a naptávol-pontban a leglassabb, aztán ismét közeledni és gyorsulni kezd. A sebességek közötti különbség annál nagyobb, minél elnyúltabb az ellipszis. A Föld pályája majdnem kör, de a keringési sebesség ennek ellenére már 29,3 és 30,3 km/s között mozog. A többi bolygó pályája is közel van a kör alakhoz, ez itt csak szemléltető ábra a különbségek túlzó kihangsúlyozásával.

III. A bolygópályák fél nagytengelyeinek a köbei és a keringési idejük négyzetei közötti arány minden bolygónál ugyanaz:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{a_3^3}{T_3^2} \ldots = \text{állandó}$$

Ez azt eredményezi, hogy egy távolabbi pályán keringő bolygónak a haladási sebessége kisebb. Tehát a Szaturnusz számára nem csak azért tart egy keringés tovább (29,46 évig), mert hosszabb az ellipszispályája, hanem ráadásul a sebessége is kisebb, mint a Földé.

Ez az úgynevezett Kepler-állandó a Nap körüli pályákra kb. $3{,}36165 \cdot 10^{18}$ m^3/s^2.

Ezek a törvények ugyanúgy érvényesek egy holdnak a bolygója körüli pályára, de a Föld körül keringő űrhajókra is. De a III. törvény **csak ugyanarra a központi égitestre** vonatkozóan érvényes, mert annak a tömegvonzásától (tehát a tömegétől) függ. Vagyis a Kepler-állandó más a Nap és bolygói, és más a Jupiter és holdjai esetében, például.

Ha egy űrhajó (legalább) olyan sebességre gyorsul fel, hogy az ellipszispályája végtelen hosszúságúra nyúlik, akkor elérte az ún. **szökési sebesség**et, és nem tér vissza. Ez már számos bolygókutató űrszondának, valamint a Holdat elérő űreszközöknek és embereknek sikerült.

A törvényekből következik az is, hogy a keringő égitest távolsága *egyedül a sebességétől függ*, és a sebessége csak a távolságtól és a központi égitest tömegétől függ. Egy bizonyos pályát csak egy bizonyos sebességgel lehet betartani, ekkor a központi égitest vonzása és a centrifugális erő egyfajta egyensúlyba kerül. Bármilyen sebességmódosítás után a test automatikusan másik pályára tér át, új egyensúlyt keresve. Amíg a központi égitesthez viszonyítva a mérete pontszerűnek is vehető, addig a *keringő test* tömege nem számít, ezért a Halálcsillag pont ugyanazon a pályán keringene, mint egy teniszlabda. Mivel ezeken a pályákon a keringő testre csak a gravitációs erő van hatással, a mozgását *egyfajta szabadesésnek is lehet tekinteni.* Az így létrejövő pályákat **tehetetlenségi pályák**nak hívják. A keringés nélkül a test a központi égitestbe csapódna.

A Naprendszer keletkezése során bizonyára nagy volt a kavargás a formálódó és sebességük szerint helyezkedő kisebb-nagyobb égitestek között. De azok, amiket mi ma bolygókként ismerünk, végül a saját sebességükkel megtalálták a saját egyensúlyi pályájukat a Nap körül. Amelyik égitest túl gyors volt, az kisodródott, amelyik pedig túl lassú, az közelebb került a Naphoz. Végül olyan helyzet állt be, aminek teljesülnek a feltételei. Ha egy bolygónak megnövelnénk a keringési sebességét, automatikusan és megakadályozhatatlanul távolabbi pályára állna.

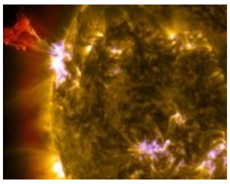
Ez a törvényszerűség az oka annak, hogy a spirálgalaxisok jellegzetes szerkezete létrejött, mert a közös tömegközépponttól távolabb keringő csillagok csak akkor maradhatnak meg a pályájukon, ha lemaradnak a középponthoz közelebbi csillagok mögött.

Kepler törvényeinek hála, ki lehetett számolni a bolygók megfigyelt keringési időiből a pályáik *arányát*. A valódi méretet nem. Ha csak egyetlen távolságot ismernének a Naprendszerben, az összes többi már kiszámolható lenne abból az egyből, sőt a Nap tömege is ismertté válna, amiből már tippelni lehetne a sűrűségére, az összetételére. Történt pár eredménytelen kísérlet, mígnem **1769**. június 3-án a Vénusz elvonult a napkorong előtt. A jelenség megfigyelésére Cook kapitány Tahitira utazott, a magyar **Sajnovics János** pedig, az osztrák Maximillian Hell segítőjeként a fagyos lappföldre.

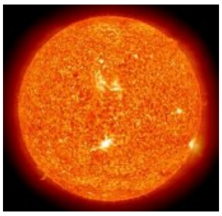
Mindkét expedíciónak sikerült nagy pontossággal megmérnie az átvonulás időtartamát, ebből pedig Edmund Halley korábban megjelentetett módszerével kiszámíthatták a Nap és a Föld távolságát. Végre megvolt egy távolság, és nagy ugrást tettek a Naprendszer megismerésében. "Mellékesen" Sajnovics egy mindent felbolygató tanulmányt írt a lapp és a magyar nyelvek hasonlóságainak részletes elemzéséről, ez volt az első tudományos bizonyíték a magyar nép finnugor eredetére.

Egyre sürgetőbb probléma, hogy a radioaktív hulladéktól valahogy megszabaduljunk. Felvetődik néha az az ötlet, hogy lőjük a szemetet a Napba. Alapvetően jó ötlet is lenne, de minden, ami a Földön van, a Nap körül kering, velünk együtt, kb. 30 km/s sebességgel. Ahhoz, hogy bármilyen űrjármű közeledni kezdjen a Naphoz, *le kell fékezni*. Ennek eredményeként a pályája ellipszissé lapul, és annak a túlsó végén meg fogja közelíteni a Napot, Kepler törvényei ezt meg is magyarázzák. Nincs más lehetőség. A baj az, hogy a kellően szűk ellipszishez legfeljebb 4 km/s sebességre kellene a rakományt lassítani, vagyis hozzánk képest 26 km/s sebességgel visszafelé kilőni. Ha nem fékezzük le eléggé, akkor csak elszáguld a Nap mellett, aztán visszatér a mi pályánk távolságáig. A legerősebb rakétáink teljesítménye egyelőre kb. a fele ennek.

A Naprendszer



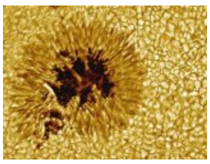
A **csillag** azért látszik, mert fény jön belőle, *minden* egyéb pedig azért, mert a közelben levő csillag (a nap) megvilágítja. A "fény" lehet szabad szemmel nem látható is, például infravörös, röntgen- vagy rádiósugárzás. Vannak jelenségek, amelyek a legjobban úgy figyelhetők meg, ha ezekről a nem látható sugárzásokról készül fénykép. Épp ezért jegyezd meg, hogy *a csillagászati fényképek nagy része nem a valódi színeket örökíti meg*, hanem ún. hamis színezésű képek. Ennek a célja az, hogy a kutatók a szoftveresen generált vagy szűrőkkel kiemelt színek alakjában teszik a maguk számára láthatóvá a sugárzás egyes tartományait, esetleg egymásra illesztenek más-más szűrőkkel készült képeket.



A **Nap** egy csillag, a tömege $2 \cdot 10^{30}$ kg (két kvintillió), az anyaga plazma halmazállapotú **hidrogén** (74%) és **hélium** (25%), szilárd felszíne nincs. A saját tömegvonzása alatt összepréselődő hidrogén folyamatos <u>magfúziós</u> folyamatban héliummá alakul, ezzel a belsejében néhány millió fokos hőmérsékletet létrehozva. A Nap életkora kb. 4,6 milliárd év.

A sugárzásának bizonyos tartományait kiszűri a légkörünk, vagy annak nagy magasságban levő, ózonban gazdag rétege, és a Föld mágneses erőtere is eltereli a Napból érkező részecskesugárzás, az ún. **napszél** nagy részét. Ha ez a szűrés romlik, akkor a földfelszínt veszélyes sugárzás éri el.

A Nap fotoszféra nevű rétegét látjuk napkorongként, ennek a "felszíni" hőmérséklete 5600 °C körüli, az átmérője **1,4 millió km**. Az alsóbb rétegekről csak közvetett adataink vannak. A felsőbb rétegeket, mint a kromoszféra és a korona, már meg tudjuk vizsgálni, a napkorong kitakarásával. A Nap fénye fehér színű.

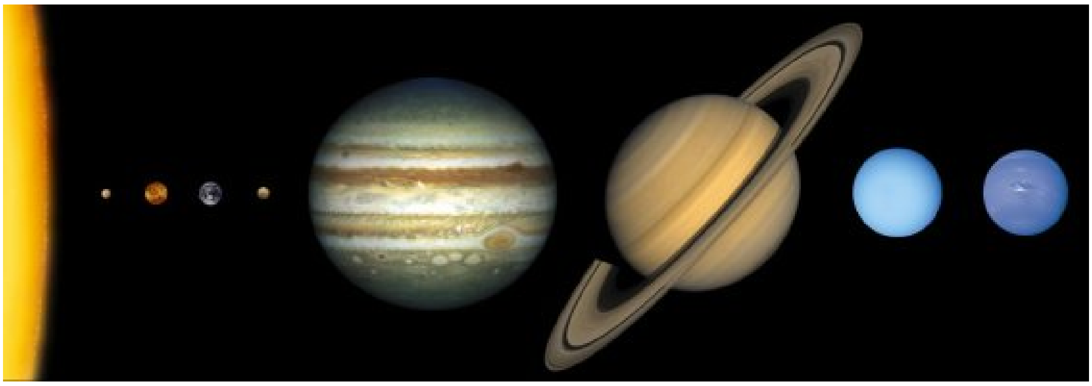


A fotoszféra állandó hőáramlása hozza létre a szemcsés felszíni szerkezetet. A napfoltokat, flereket, napkitöréseket, plazmaíveket, koronakidobódásokat a Nap hihetetlenül erős mágneses terének hullámzásai, örvénylései irányítják. A naptevékenység intenzitása átlagosan kb. 11 éves periódusokban ingadozik.

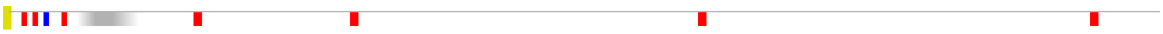
A Föld és a Nap átlagos távolsága a <u>csillagászati egység</u> (CsE, AU), ez kb. **150 millió kilométer** (500 fénymásodperc).

Néhány szám: a Föld átmérője **12756 km**, az Egyenlítő hossza 40075 km, **a Hold távolsága 384 ezer km**. A Vénusz távolsága, amikor hozzánk legközelebb van, 41 millió km, a Marsé 56 millió km. A Neptunusz távolsága 30 CsE. A Naprendszer átmérője elég bizonytalan fogalom, vehetjük 100 ezer csillagászati egységnek.

A **<u>bolygók</u>** a Nap körül keringenek, azonos irányban, körhöz közel álló ellipszispályákon. A pályák egy síkba esnek. A Naptól való növekvő távolság szerint: **Merkúr, Vénusz, Föld, Mars**, itt következik a *kisbolygóövezet*, **Jupiter, Szaturnusz, Uránusz, Neptunusz**. A belső négy bolygó szilárd kőzetbolygó. A külső négy bolygó gázokból áll, ami a legbelső magban a nagy tömegvonzás súlya alatt folyadékká sűrűsödik, ezért nem lehet rájuk leszállni, mert nincs hová. Ezek a bolygók mind jóval nagyobbak a kőzetbolygóknál, ezek a gázóriások. Az utolsó kettő kivételével mindegyik bolygó látható szabad szemmel is, persze csak csillagszerű pontként, a legfényesebb a Vénusz.



A képen sorrendben és méretarányosan láthatók, de a <u>távolságaik</u> valójában ilyenek:



A **Merkúr** harmadakkora, mint a Föld, teljesen kopár, a Nap felőli oldalán +400, a túlsó oldalán -180 Celsius-fok van. A Naptól mért távolsága 0,31 és 0,47 CsE között mozog. Egy év 88 nap.

A **Vénusz** majdnem akkora, mint a Föld, innen nézve gyönyörű, fényes csillagnak látszik, ő az Esthajnal-csillag. (Hol este, hol hajnalban látható, a Nap körüli keringése miatt, 584 napos periódussal.) A forgási iránya ellentétes a keringési irányával. A légköre sűrű szén-dioxid és nitrogén, kevés kén-dioxid, a felszíni nyomás 92 atmoszféra, a hőmérséklet 420°C. Tankönyvi példája az üvegházhatásnak.

A **Föld** légköre 78% nitrogén, 21% oxigén, 1% argon, 0,03% szén-dioxid. A felszíni nyomás 1 atmoszféra, az átlaghőmérséklet 14°C, ami miatt folyékony víz van rajta, ez az élet keletkezésének és fennmaradásának fontos feltétele. Ha az átlaghőmérséklet 2 fokot emelkedik, a tengeri planktonok jelentős része kipusztul, csökken a halállomány, de főleg csökken az oxigéntermelés, valamint a szén-dioxid elnyelése, így a hőmérséklet tovább nő, kezdhetünk csomagolni.

A **Mars** feleakkora, mint a Föld, a nehézségi gyorsulás 0,38 g, a légköre szén-dioxid, felszíni légnyomása 0,008 atmoszféra, az egyenlítői csúcshőmérséklet 0°C körül mozog. A sarkokon van némi fagyott víz. Már több űrszondánk is leszállt rajta, vizet és valami életet keresgélve.

A **Jupiter** a Földről nézve a második legfényesebb bolygó, szilárd felszín nélküli gázóriás. A Földnél 11-szer nagyobb, a tömege a Föld 311-szerese, ez 2,5-szer nagyobb, mint az összes többi bolygó tömege *együttvéve*. Az alsóbb légkör kb. 75% hidrogén, 24% hélium. A gázóriások felszíni forgási sebessége nem egyenletes, ezért alakulnak ki rajtuk a több száz km/h sebességű szelek és különféle anyagú felhősávok. A gázburokba eddig 150 km mélyen sikerült behatolni és onnan jeleket küldeni, aztán győzött a (váratlanul nagy) forróság és a nyomás. A Nagy Vörös Foltot már 1664-ben látták, ami egy ezek szerint legalább 350 éve létező hatalmas ciklon, és gőzünk sincs arról, hogy ez hogyan lehetséges. A legnagyobb holdjai: **Io**, **Europa**, **Ganymedes**, **Callisto**, ezeket Galilei látta meg először a távcsövével 1610-ben. Egy egyszerű binokuláris távcsővel is *simán megfigyelhető* fényes pontok a bolygó mellett, izgalmas érzés megnézni.

A **Szaturnusz** mérete a Föld 9 és félszerese, tömege a Föld 95-szöröse, az összetétele a Jupiterhez hasonlít, gázóriás. A felhőzetében 500 km/h sebességű áramlatok is vannak. A gyűrűket egy nagyobbacska távcsővel már észre lehet venni. A vastagságuk csak tíz-húsz méter! Millióny kisebb-nagyobb jég- és kődarabból állnak, amelyek a bolygó körül keringenek, azonos síkban. (Több síkban levő gyűrűk nem jöhetnek létre, az csak film.) A Cassini űrszonda káprázatos fotókat készített, és egészen meghökkentő alakzatokat tett megfigyelhetővé. Valószínűleg egy hold anyagából keletkeztek, amely valami miatt, talán egy üstökössel való ütközés hatására túl közel került a bolygóhoz és az árapályerők szétmorzsolták. A másik három gázbolygó körül is vannak gyűrűk, de óriástávcsővel is alig láthatóak.

Az **Uránusz** 4-szer nagyobb a Földnél, a tömege 14-szer nagyobb, gázbolygó. Anyaga szintén hidrogén és hélium. Sokat nem tudunk róla, a Voyager-2 űrszonda elment mellette, fotózta, méregette. Érdekessége, hogy a forgástengelye "fekszik", nagyjából a keringési síkjába esik, ehhez valami komoly dolognak kellett történnie vele évmilliárdokkal ezelőtt.

A **Neptunusz** majdnem 4-szer nagyobb a Földnél, a tömege 17-szer nagyobb, gázbolygó. Eddig csak a Voyager-2 szonda került a közelébe, ezért alig tudunk róla valami biztosat. A légkörében levő kevés metán miatt szép kék színe van, de a nagyon távoli Nap miatt a sötétségben ez nem lehet túl feltűnő.

Melyik a legkisebb bolygó? Melyeket láthatod szabad szemmel?
Mi a leglényegesebb különbség a belső négy és a külső négy bolygó között?

A **törpebolygók** kategóriája 2006-ban született. Ennek minősítették át a kisbolygóöv legnagyobb égitestét, a **Ceres**t, a Neptunusz pályáján kívül pedig a következők vannak: **Pluto** (felfedezve 1930-ban, 2006-ig bolygó), **Eris** (2003), **Haumea** (2004), **Makemake** (2005). A kritériumuk az, hogy az elég nagy gravitációjuk nagyjából gömb alakúvá formálta őket, és persze hogy a Nap körül keringenek.

A bolygók körül keringenek a kisebb-nagyobb, szilárd felszínű **holdak**. A Merkúrnak és a Vénusznak nincsenek holdjaik. Sok nagy és gömbölyű hold van, mint a mi Holdunk; ha ezek a Nap körül keringenének, törpebolygók lennének. A Jupiter és a Szaturnusz holdjain egy csomó furcsa dolgot lehet látni, a Titánnak még légköre is van, és már minimum két holdról tudjuk, hogy a vaskos jégfelszín alatt folyékony víz lehet. Azokban valamilyen mikroszkopikus életről is lehet már fantáziálni. Törpebolygónak is lehet holdja, a Pluto körül három kis hold is kering.

A **Hold** mérete a Föld negyede, a tömege csak 0,012 földtömeg. Távolsága 384 ezer km (1,28 fénymásodperc), a keringési ideje 27,3 nap, a két újhold közötti idő 29 nap 12 óra 44 perc. Mivel ugyanolyan szögsebességgel forog (mert forog!), mint ahogy kering, állandóan ugyanazt az oldalát látjuk. A **holdfázisok** oka az, hogy a Holdat a Nap mindig más irányból világítja meg, és azt mi innen, "belülről" figyeljük. Légköre nincs, csak valami kis gáz, 10^{-18} atmoszféra "nyomással". (Ezt hogy sikerült megmérni?) A felszín hőmérséklete napfényben +140°C, sötétben -180°C. A nehézségi gyorsulás 0,165 g.

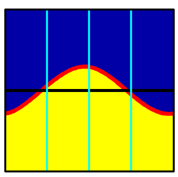
A Mars pályáján túl van a kisbolygóöv. A **kisbolygók** (aszteroidák) néhány kilométeres és annál is kisebb sziklák, kb. 200 ezer van belőlük katalogizálva, a többit még nem sikerült észrevennünk. Ütközések vagy más égitestek vonzása miatt sok kisbolygó lassul le, és kerül a Naphoz közelebbi, néha ún. "földsúroló" pályára.

Egy szétrombolandó kisbolygó felszínén történő robbantással, akár atombomba bevetésével az a gond, hogy *minden* robbanóanyagunk arra alapul, hogy a hirtelen kitáguló levegő gigantikus lökéshulláma mindent szétvet. Az űrben a levegő az egyetlen, ami ehhez hiányzik. Az atombomba hősugárzása talán megolvasztja a kisbolygót, de akkor majd egy izzó kisbolygó fog becsapódni a Földbe, szóval sajnos nem úgy megy az, ahogy a filmekben.

A Nap körül keringenek az **üstökösök**, amelyek többnyire a távoli **Kuiper-öv**ből és a még távolibb **Oort-felhő**ből (ez is egy gyűrű a Nap körül) kerülnek elő, elnyúlt ellipszispályán érkezve a belső Naprendszerbe. Az üstökösbe fagyott gázok, amikor közeledik a Naphoz, elkezdenek elpárologni (a hőmérséklete még mindig -150 fok körül van), és ezt a nagyon ritka gázt a Nap részecskesugárzása, a *napszél* kifelé fújja, ebből lesz a csóva. Azért látjuk, mert szétszóródik rajta a Nap fénye. Egy fényesebb üstökös hetekig is látható szabad szemmel vagy kis távcsővel.

Hol van a kisbolygóöv? Mi a hold és a törpebolygó közötti különbség?

A **meteorid**ok kisebb kődarabok, amik mindenféle ütközések során töredeztek le holdakról, kisbolygókról, sokszor meteorrajba rendeződve keringenek a Nap körül. (Ezek a Leonida, Quadrantida, Perseida stb. rajok.) Amikor a légkörbe érnek, **meteor** lesz belőlük, és általában a leérés előtt elégnek. Ami esetleg földet ér belőlük, azok a **meteorit**ok.



A Föld tengelyferdesége miatt a Nap az év folyamán egyre alacsonyabban jár, aztán elkezd emelkedni, hosszabb ívet jár be napkeltétől napnyugtáig, a nappalok hosszabbodnak, végül eljut a nyári tetőpontra, utána csökkenni kezd a nappalok hossza, végül télen kezdődik az egész elölről. A téli **napforduló**, az emelkedés kezdete december 21., a tavaszi **napéjegyenlőség** (a nappal és az éjszaka hossza azonos) március 20., a nyári napforduló június 21., az őszi napéjegyenlőség szeptember 22. körül van, egy-napos ingadozással. A diagram a nappal hosszának éves változását mutatja a mi szélességünkön. Tőlünk északabbra a hullámvonal függőlegesen megnyúlik, az Egyenlítő felé haladva pedig egyre laposodik.

A **napfogyatkozás**kor a Hold eltakarja a távoli Napot. Szerencsés véletlen, hogy a kettő a Földről szinte teljesen azonos nagyságúnak látszik, ezért jöhet létre például a teljes és a gyűrűs fogyatkozás is, vagy a "gyémántgyűrű". A **holdfogyatkozás**kor a Hold átmegy a Föld által az űrbe vetett árnyékon. Mivel a Hold pályája kicsit ferde, ez nem történik meg minden keringéskor.

Melyik napon a leghosszabb a nappal? Miből van az üstökös csóvája?

És tovább!

A **csillagképek** a csillagos égbolt alatt fantáziáló emberek által kitalált mesék szereplői. Más népek más csillagokat vontak össze, más mesealakokat látva bennük. A csillagászat ma az ókori görög mitológiához kapcsolódó alakzatokat használja, pusztán a tájékozódás megkönnyítésére. A régi magyarok a Nagy medve csillagkép *részét* alkotó hét csillagban Göncöl táltos, másik mese szerint Illés próféta törött rúdú szekerét látták, az Orion csillagkép "övét" alkotó három egymás melletti csillagot aratóknak látták, akik mögött az Orion-köd Sánta Kata, aki az ebédet viszi nekik. A Bika "szarvának" végén levő látványos nyílt halmazban a Fiastyúkot és csibéit látták, a görögök viszont Pléióné és Atlasz hét lányát, a pleiádokat. Az egyiptomiaknak volt Krokodil csillagképük is, a Göncölszekér pedig igazából Széth isten combja, de van Oroszlán is az égen, csak éppen máshol, mint a görögök szerint. A mezopotámiaiak szerint a mai Halak valójában a Skorpió ollója, a mai Kos a Béresgazda volt, és így tovább, a kultúrtörténészek gazdag égi mondavilágokat ismernek, a csillagos égbolt tényleg megindítja a fantáziát. Nincs "igazi" csillagkép-rendszer, hiszen nincs okunk bármelyiket is annak tekinteni. (Az asztrológiai jelentésmagyarázatok is tulajdonképpen elég önkényes és kevert választásra alapulnak.)

Akárhogyan is alkotunk csillagképeket az égen, az ahhoz tartozó csillagok tőlünk mért távolsága nagyon változatos, és csak felőlünk nézve rendeződnek az általunk ismert alakzatokba. Egy csillaghoz gyakran közelebb van a szomszédos csillagkép egyik csillaga, mint ami az égbolton *látszólag* mellette áll.

A **fényév** a távolság mértékegysége, 9,5 billió kilométer, 9,5 petaméter. A **parsec** (parszek) egy másik mértékegység, kb. 3,6 fényév. (A név a parallaxis és secundum szavakból származik.)

A legközelebbi csillag (Alfa Centauri) távolsága 4 fényév, pontosabban 276 ezer CsE. A mi **galaxis**unk (a **Tejútrendszer**) átmérője kb. 100 ezer fényév. Az égen látható összes csillag *a mi galaxisunkban van*. Ez egy teljesen szokványos spirálgalaxis, kb. 200 milliárd csillagból állhat. Sajnos nem láthatunk rá kívülről, hiszen benne vagyunk, az egyik spirálkar külső harmada környékén. Az alakja a belülről végzett felméréseink alapján valószínűleg hasonlít a szomszédságunkban levő Androméda-galaxisra (lásd a képen), amelynek a távolsága csak kb. 2,5 millió fényév, és az égbolton egy körömnyi méretű, nagyon halvány folt, az Androméda-köd.

A **Tejút** az égbolton végighúzódó halvány csillag sáv, csodálatos látvány, de igazi sötétség kell a megpillantásához. A galaxisunkat látjuk ilyen alakban *belülről*, mivel mi is a síkjában vagyunk. Kár, hogy a galaxis központi részét pont nem láthatjuk, mert kitakarja előlünk egy gigantikus csillagközi porfelhő. De infravörös fényt és más sugárzásokat észlelő távcsövekkel át lehet látni ezen a felhőn.

A más csillagok körül keringő bolygókat **exobolygó**knak hívjuk, eddig mintegy ezer darabról tudunk, a távcsövek erős ütemben fejlődnek. A többségüket közvetlenül nem látjuk, csak a csillag megfigyelésével lehet tudni róluk. Amelyiket pedig látjuk, azt is csak egy nagyon halvány pontként. Eddig nem találtunk lakhatót, olyat sem, amelyiken el tudunk képzelni bármilyen életformát.

A Világegyetemben több száz milliárd *galaxis* van*, az általunk észlelt legtávolabbi távolsága 13,3 milliárd fényév. A Nap kb. 4,6 milliárd éve született. A minden ismert dolgot magába foglaló Világ-egyetem kora a jelenlegi tudásunk szerint **13,8 milliárd év**.

A **nóva** a sejtéseink szerint olyan csillag, amely az ikercsillagától elszívja az anyaga egy részét, ami végül burokként lerobban róla, a fénye messziről is jól látható. A **szupernóva** olyan csillag, amely az élete végén a saját súlya alatt összeomlik, majd szétrobban.

Mi az a Tejútrendszer? Körülbelül mennyi a Naprendszer és a Tejútrendszer közötti méretarány?

* Keress rá az Abell 1689-re vagy az Abell 2218-ra. Azok az oválisok mind egy-egy galaxis, az égbolt egy picike területén.

A **fekete lyuk** olyan összeomlott, fantasztikus tömegű, szupersűrű óriáscsillag, amelytől bizonyos távolságra már a fénysebesség sem elég a gravitációja leküzdésére, ezért közvetlenül belőle nem érkezik sugárzás. A fekete lyukon átrepülni nem lehet, mert a lyuk csak egy hasonlat, amit eredetileg csak viccnek szántak.

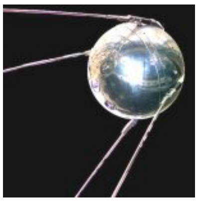
A legközelebbi fekete lyuk 1600 fényévre van. A fekete lyukakat nem lehet látni, mert belőlük nem jön ki semmilyen sugárzás, de az óriástávcsövekkel látni lehet a körülöttük összesűrűsödő, felbomló atomi szerkezetű anyag sugárzását.* A galaxisunk közepében van valami nagyon erős gravitációjú dolog, amely körül sikerült megfigyelni néhány csillag keringését, ám mivel ez a dolog nem látszik, feltételezzük, hogy az egy különlegesen nagy tömegű fekete lyuk.

Az **asztronómia** az "igazi" csillagászat, az **asztrológia** a csillagjóslás. Az asztrológusok szerint döntő hatással van az életünkre, hogy a bolygók egymáshoz képest hogyan helyezkednek el az égbolton. A négy létező fizikai kölcsönhatás közül kiemelkedően a gravitáció a legerősebb. A Vénusz gravitációs ereje a hozzánk legközelebbi helyzetében 0,000000225 N. Nagyjából akkora, mint egy kisebb panelházé 30 méter távolságból. A többi bolygó hatása még gyengébb. Erről talán ennyit.

A Világegyetem összes anyaga ma az általános tudományos vélekedés szerint egy apró, felfoghatatlan állagú magból keletkezett egy szintén felfoghatatlan robbanásban. A kozmológusok állítólag az első három másodperc utáni dolgokat már mind meg tudják magyarázni. Az Ősrobbanás témájával az a baj, hogy bárki kockázat nélkül fantáziálhat bármiről, ugyanis ki van zárva, hogy valaki visszamenjen oda, és ellenőrizze a feltevést.

Űreszközök

Jöjjenek röviden az űrtörténelem fő pontjai, hogy a leghíresebb nevek legalább ismerősek lehessenek, az időpontokról pedig körülbelüli fogalmaid lehessenek.



A Föld (vagy egy másik bolygó) körül keringő mesterséges eszközök a **műholdak** (és űrállomások), műbolygónak csak a Nap körüli pályára került bolygóközi űrszondákat hívhatjuk. Az első műholdat a szovjetek lőtték fel, **Szputnyik-1** néven, **1957**. október 4-én, 60 centis, 84 kilogrammos gömb volt, a fő feladata az, hogy rádión pittyegjen, mindenkinek igazolva, hogy a Föld körül kering. A légkör foszlányai pár száz kilométer magasságig elérnek, ez, és a Hold és a Nap gravitációs zavarása együtt azt eredményezi, hogy minden Föld körül keringő eszköz lelassul egy idő után, és ahogy a légkör egyre kevésbé jelentéktelen részeibe ér, tovább lassul, majd végül elég. Ezért a távközlési műholdaknak is kell egy kevés hajtóanyagot vinniük, mert időnként kis pályakorrekciókra van szükség.

Megegyezés dolga, hogy milyen magasságnál húzzuk meg a világűr alsó határát. Néha a 100 kilométeres magasságot veszik ennek. Csak azért érdekes, mert kísérleti járművekkel régen és mostanában is sikerült magasra jutni, és véleményes, hogy mit vehetünk már "az űrben járt" eszköznek.

Az **űrhajó** olyan űreszköz, amely embereket szállít, vagy rakományt egy űrhajó, űrállomás számára. Az **űrállomás** olyan eszköz, amely tartósan Föld körüli (más szóval *orbitális*) pályán kering, és űrhajók visznek oda és hoznak vissza űrhajósokat. Ezeknek az utaknak a pályamagassága 300 km körül mozog, több mint ezerszer kisebb a Hold távolságánál.

Az első űrhajós a szovjet **Jurij Gagarin** volt, 1 kört tett meg a Föld körül Vosztok-1 nevű űrhajójával, **1961**. április 12-én, igazolva, hogy az ember túlélheti ezt, mert ekkor még ez is kérdéses volt. Azóta ez az űrhajózás napja. Az első amerikai űrhajós **Alan Shepard** volt, aki **1961**. május 5-én "űrugrást" hajtott végre az első Mercury űrhajóval, aztán Gus Grissom ugyanígy, végül **John Glenn** volt az, aki már a Földet is meg tudta kerülni, a tervezett 7 kör helyett műszaki probléma miatt 3-szor, **1962**. február 20-án. A lemaradást az űrprogramban az amerikaiak sokáig nem bocsátották meg a NASA-nak.

Az első, nagyon kísérleti űrsétát **Alekszej Leonov** mutatta be a Voszhod-2 űrhajóból kikászálódva, **1965**. március 8-án, "köldökzsinóron" a hajóhoz kapcsolva. Alig tudott visszajutni a helyére, sok átgondolnivalót adva a mérnököknek. Az első kábel nélküli űrsétát, "rakétahátizsákkal", **Bruce McCandless** mutatta be, **1984**. február 7-én, a Challenger űrsiklóról.

Az első igazi űrállomás a **Szaljut-1** volt, **1971**. április 19-én lőtték fel, fél évnyi szolgálat után távirányítással lehozták és a légkörben megsemmisült. Jelenleg a kezdetben orosz-amerikai gyártmányú **Nemzetközi űrállomás** (ISS) van még pályán, az első modulját **1998**. november 20-án lőtték fel, azóta sok új egységgel és berendezéssel bővítették. Sok ország, köztük Magyarország is ott van a résztvevők

* A magyartanárodat lenyűgözheted azzal, hogy látjuk a fekete lyukba zuhanó anyag halálsikolyát. :-)

között. Ma is működik, de a pénzhiány miatt elég alacsony kihasználtsággal; mondhatjuk úgy is, hogy inkább csak őrzik, mint használják.

Melyik évben repült a világ első űrhajósa?

Az első, idáig egyetlen magyar űrhajós **Farkas Bertalan** (született 1949. augusztus 2-án), korábbi vadászpilóta, a Magyar Népköztársaság Hőse és a Magyar Népköztársaság Űrhajósa kitüntetések birtokosa, 1997 óta nyugalmazott dandártábornok. A szovjet Valerij Kubaszov (1935-2014) társaként **1980. május 26**-án szállt fel a **Szojuz-36** űrhajóval, két nap múlva kapcsolódott össze a Szaljut-6 űrállomással. Hat nappal később, június 3-án az előző legénységgel már korábban bedokkolt Szojuz-35 fedélzetén tértek vissza, sima landolással a végtelen kazah sztyeppe közepére.

A tartalékszemélyzet magyar tagja **Magyari Béla** volt (született 1949. augusztus 8-án), korábbi vadászpilóta, a Magyar Népköztársaság Hőse kitüntetés birtokosa, aki szintén teljes kiképzésben részesült. A szovjet Interkozmosz program megszűnése miatt végül sajnos nem repülhetett. Már nyugalmazott mérnök-ezredesként egy ideig a Magyar Asztronautikai Tanács elnöki posztját töltötte be.

Először idegen égitestre az Apollo-11 két űrhajósa, **Neil Armstrong** és **Edwin Aldrin** lépett, **1969**. július 20-án, Eagle (Sas) nevű holdkompjukkal, a Hold körüli pályán az űrhajóval **Michael Collins** várta őket. 1969 és 1972 között hat leszállással összesen 12 űrhajós járt a Hold felszínén. Az utóbbi három alkalommal egy-egy holdautót is használva, amelyeknek a főkonstruktőre a magyar származású **Pavlics Ferenc** (1928–) volt. A Hold felszínére lépett űrhajósok további névsora: Pete Conrad és Alan Bean, Alan Shepard és Ed Mitchell, Dave Scott és Jim Irwin, John Young és Charles Duke Jr., Eugene Cernan és Harrison Schmitt.

Az első többszöri felhasználású űrhajó, az első amerikai űrsikló, a **Columbia 1981**. április 12-én szállt fel (pont az űrhajózás napján) **John Young** és **Robert Crippen** irányítása alatt. Két nap múlva, számtalan tesztmanőver után az élesben még sosem használt géppel tankönyvbe illő leszállást mutattak be az amerikai Edwards légibázison. Ezzel kapcsolatban megjegyezhető, hogy az űrsiklók hajtómű nélkül szálltak le, vagyis az első leszállási kísérlet egyben az utolsó is volt. A programot összesen 135 repülés után a gazdaságtalan üzemeltetés miatt 2011-ben lezárták. Az USA-nak jelenleg nincs üzemképes űrjárműve, az ISS-re az oroszok fuvarozzák őket.

A szovjeteknek is volt egy 1988-ban hibátlan, *automata vezérlésű* próbarepülést bemutató űrsiklójuk, a Buran, de a programot pénzhiány miatt törölték, a siklót beállították valami hangárba, és ennyi. Azóta már tönkrement, ráomlott a hangártető. Két befejezetlen példány múzeumban áll.

Az első kínai űrhajós **Jang Li-vej** volt, aki **Sencsou-5** nevű űrhajójával **2003**. október 15-én indulva 14-szer kerülte meg a Földet. Azóta további hat Sencsou-űrhajó szállt felt, közülük az egyik pilóta nélkül, kísérleti összekapcsolódást végezve a 2011. szeptember 29-én pályára állított **Tienkung-1** űrállomással. Kína a harmadik ország, amelynek saját űrprogramja van.

Adózzunk tisztelettel a hivatásuk közben halálos balesetet szenvedett űrhajósoknak:

Apollo-1 – 1967. január 27.: Virgil "Gus" Grissom, Edward White, Roger Chaffee. Földi indítási gyakorlat közben a lezárt kabinban heves tűz ütött ki, az űrhajósok bennégtek.

Szojuz-1 – 1967. április 23.: Vlagyimir Komarov. A már repülés közben kormányozhatatlanná vált kabin forgása miatt a leszállás során az ejtőernyő összecsavarodott, és a kabin a földbe csapódott. Az űrhajós előtte tudta, hogy a leszállása valószínűleg nem fog sikerülni.

Szojuz-19 – 1971. június 29.: Georgij Dobrovolszkij, Vlagyiszlav Volkov és Viktor Pacajev. A leszállás során oxigénhiány miatt eszméletüket vesztették és meghaltak, mert a leszállókabin légszigetelése még nagy magasságban megsérült. Mivel a leszálláskor nincs rádiókapcsolat, a tragédia a kabin felnyitásakor derült ki.

Challenger STS-51L – 1986. január 28.: Francis Scobee, Judith Resnik, Ellison Onizuka, Ronald McNair, Michael J. Smith, Gregory Jarvis, Christa McAuliffe. Az űrsikló üzemanyagtartálya a felszállás közben egy tömítés szétfagyása következtében felrobbant.

Columbia STS-107 – 2003. február 1.: Willie McCool, Dave Brown, Michael Anderson, Rick Husband, Kalpana Chawla, Laurel Clark, Ilan Ramon. Az űrsikló bal szárnyán a felszálláskor lyukat ütött egy levált burkolóelem. Egy héttel később a visszatérés során az ezer fokra hevülő levegő a nyíláson behatolt, szerkezeti károkat okozott, a gépet kormányozhatatlanná tette, ami végül a levegőben szétszakadt.

Furcsa módon az űrben még nem történt halálos baleset, pedig volt már ütközés, tűz, beragadt segédhajtómű és a sisakba ömlő hűtőfolyadék is.

Melyik három ország bocsátott már fel saját űrhajókat?

A geoszinkron vagy **geostacionárius műhold** olyan pályán kering, ahol pont annyi idő alatt kerüli meg a Földet, mint amennyi idő alatt a Föld körbefordul (azaz 1 nap). Ezért innen nézve állandóan az ég egy-egy adott pontján állónak látszik. A műsorszóró műholdak között sok ilyen van, hogy az antennát ne kelljen állandóan mozgatni. A hátránya a műhold nagy távolsága. (Házi feladat lesz. Tényleg.)

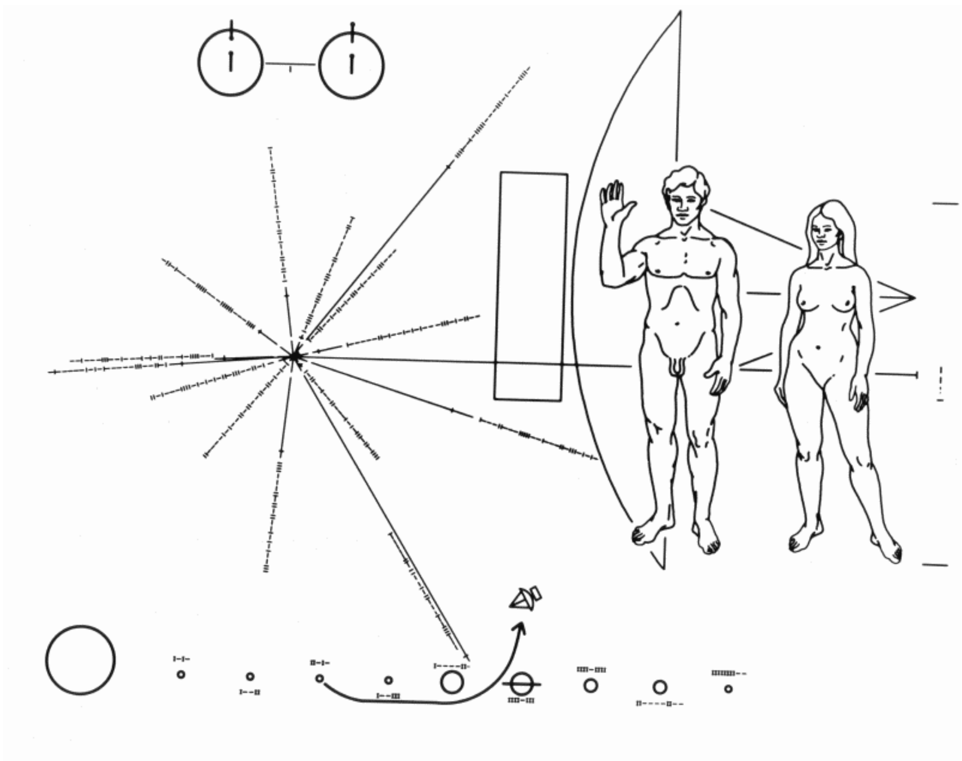
Pilóta nélküli eszközökkel már minden bolygót sikerült megközelíteni. A Holdon főleg a szovjeteknek (oroszoknak) voltak sikereik, 1966 és 1976 között 11 leszállás történt, elsőként a **Luna-9** szondával, **1966**. február 3-án. Két ilyen alkalommal a földről irányítható Lunahod-1 és -2 járműveket vitték oda, három másik szonda anyagmintát is visszahozott a földre. Aztán hosszú szünet. 1976 után elsőként **2013**. december 14-én szállt le a kínai Jütu (Jáde Nyúl), egy automata vezérlésű holdjáró robot. Csak másfél hónapot bírt, de ez akkor is egy nagy visszatérés volt, 37 év elteltével.

A Vénuszon először leszállt űrszonda a szovjet **Venyera-7**, **1970**. december 15. A Merkúrra még nem sikerült leszállni. A Marson az első a szovjet **Marsz-3** volt, **1971**. december 2., de az antennája szinte azonnal tönkrement, így az első hasznos leszállás az amerikai Viking-1 szondáé, 1976. július 20-án. A Szaturnusz Titán nevű holdját az európai ESA szervezet **Cassini** űrszondájának Huygens leszállóegysége érte el **2005**. január 14-én. A 67P/Csurjumov–Geraszimenko üstököst az ESA **Rosetta** űrszondájának Philae leszállóegysége **2014**. november 12-én érintette meg, ötödik idegen égitestként.

A Marson távirányítású, illetve félautomata mozgó kutatóegységek is dolgoztak már, a felszíni anyagot elemezve és sok fényképet készítve. Hírneves lett ezek közül a két kis marsjáró, a 2004-ben leszállt *Spirit* és *Opportunity*. A NASA ezek élettartamát kb. 3 hónapra becsülte, arra számítva, hogy a homokviharok lassan befedik az energiaellátást biztosító napelemtáblákat. Ehhez képest a Spirit 2010-ig működött. Az Opportunity még mindig dolgozik (2014), kapirgál, elemezget, fényképez, és küldi az adatokat. Bármelyik ősrobbanás-elméletnél hihetőbb, hogy egy-egy marslakó időnként a szerkentyű mögé lopózik, és kis seprűvel letakarítja róla a homokot, mert annyira megkedvelték már, ahogy ide-oda gurul.

Mikor repült a magyar űrhajós és hogy hívják? Ki volt a tartalékpilóta?

Eddig négy űrszonda jutott a Neptunusz pályáján kívülre: a **Pioneer**-10 és -11, és a **Voyager**-1 és -2. A Pioneer szondákra az alábbi ábrával gravírozott aranyozott alumíniumtáblát szereltek, az esetlegesen rájuk bukkanó idegen lényeknek üzenve az emberről és a Naprendszer helyéről, univerzálisan megfejthetőnek remélt kódok kreálásával. A Voyager szondákra pedig egy-egy aranyozott réz hanglemezt helyeztek el, ötven nyelven elhangzó üdvözlő szavakkal, mindenféle emberi és természeti hangokkal, és 115 analóg kódolású fényképpel. A lemez burkolatára képes útmutatót véstek a lemez felhasználásához.



Matek (és egyéb hasznosságok)

Ahhoz, hogy a fizikában a fogalmakat, rajzokat, képleteket megértsd, nélkülözhetetlen, hogy az ehhez szükséges matematikai alapfogalmak világosak legyenek számodra, és rutinszerűen tudj velük bánni. Most lehet, hogy azt gondolod, hogy na, itt kezdődik az egész baj, mert a matekot is utálod, de legalábbis hülye vagy hozzá. Nos, az az igazság, hogy ha azokhoz, amiket itt összeszedtem, *tényleg* hülye vagy, és még megjegyezni sem tudod, akkor valóban baj van, ez nem neked való, béke poraidra. De nem tartom valószínűnek, hogy ha te egy ilyen segédanyagot elkezdtél olvasni, akkor baj van. Szóval légy szíves, tedd félre a megszokásból is érzett utálatodat, és olvasd el tiszta fejjel az alábbiakat, szánj rá erre a szájbarágós összefoglalásnak a megismerésére összesen egy órát. Csak olyasmiről lesz szó, amit már ismersz. Ha pedig mégsem, akkor itt a legjobb alkalom arra, hogy megismerd. Nem kell egyszerre lenyelned, de később kénytelen leszel ide visszatérni, és alaposan elolvasni, megtanulni, ez *elkerülhetetlen*. Azért ilyen hosszú, mert egészen aprólékosan magyarázom el a dolgokat, hátha úgy szeretnéd. Ha rövidebben is elég lett volna, annál jobb.

Törtek és hatványok

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel összeszorozzuk.

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Tört nevezője nem lehet 0, az olyan tört nem értelmezhető. Bármilyen szám tekinthető törtnek is, ha az könnyebbé teszi neked a továbblépést, az ismerős képlet megtalálását:

$$m=\frac{m}{1}$$

ez bármilyen egész vagy tört m-re igaz. Ha valami 1-gyel van osztva vagy szorozva, akkor végül ezeket áthúzhatod, mert nincs jelentőségük. De a számlálóban mindenképpen maradjon valami, hiszen

$$\frac{1}{m}\neq m\ .$$

Minden szám **reciprok**a az, ha közönséges tört alakra átalakítva a számlálót és a nevezőt felcseréljük.

$$\frac{a}{b}\text{ reciproka}=\frac{b}{a}\qquad d\left(=\frac{d}{1}\right)\text{reciproka}=\frac{1}{d}$$

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{s}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{q}{p}=\frac{s}{r}$$

Bármit törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk.

$$\boxed{\frac{n}{\frac{a}{b}}=n\cdot\frac{b}{a}\qquad\qquad \frac{\frac{n}{m}}{\frac{a}{b}}=\frac{n}{m}\cdot\frac{b}{a}\ \left(=\frac{n\cdot b}{m\cdot a}\right)}$$

Vegyes törtből közönséges törtet csinálni egyszerűen lehet, összeadásként (közös nevezővel), leírom a végletekig részletezve:

$$D\frac{e}{f}\ \left(=D+\frac{e}{f}=\frac{D}{1}+\frac{e}{f}=\frac{D\cdot f+e}{1\cdot f}\right)=\frac{D\cdot f+e}{f}$$

Lássuk a hatványozást.

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

Lehet, hogy eddig ezt nem tudtad:

$$\frac{1}{a^4} = a^{-4}$$

Persze nem csak 4-re, hanem bármire. Erre az összefüggésre *szükséged lesz* a normál alakok használata során. De például a folyó szövegben is előfordul, hogy az alábbi mértékegység bal oldali változatát a jobb oldalival helyettesítik:

$$kg \cdot \frac{m}{s^2} \quad = \quad kg \cdot m \cdot s^{-2}$$

Ne rohanj, nézd meg és értsd meg, ne ennyicskén múljon valamilyen képletnek a megértése. És próbáld ki, hogy a számológépeden ki tudod-e számolni az 5^{-3} értékét, ami 0,008. Mindegy, hogy `5` **`xʸ`** `3` **`+/-`** **`=`** vagy `5` **`xʸ`** `3` **`=`** **`1/x`**, csak valahogy menjen.

$$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

Számold ki ezt is a=6561 esetre, az eredmény 9. Talán így kell beírnod: `6561` **`xʸ`** `4` **`1/x`** **`=`**. Ez csak találgatás, a számológépek nem egyformák. **Gyakorold külön a saját számológéped használatát is**, ne egy dolgozat írásakor kelljen a fejedet törni azon, hogy hogyan kell reciprokot venni. Szerintem tanuld meg a memória használatát is, hogy ha egy tört nevezőjét számoltad ki előbb, akkor ne kelljen papírra leírnod és később visszapötyögnöd. Ha megvan a nevező, az **`M in`** vagy **`MS`** vagy valami hasonló gombbal tárolod (csak egy dolog lehet egyszerre a memóriában), aztán amikor sorra kerül, az **`MR`** gombbal lehívod. Az **`M+`** csak hozzáadja az aktuális számot a memóriában már ott levő számhoz, figyelj erre. Drága perceket veszíthetsz a bénázással.

Négy ide tartozó alapösszefüggés:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b = a^{b \cdot c} \qquad a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$$

Ezt tanuld meg úgy, mint a nevedet, mert ha elrontod, akkor a számításaid egy részét garantáltan el fogod szúrni. A függvénytáblázatodban is benne vannak „A hatványozás azonosságai” cím alatt. Figyelj oda arra, hogy az első kettő szorzásra vonatkozik, két hatvány *összeadására* nincs külön képlet. És természetesen ha valamelyik kitevő negatív vagy tört, a művelet akkor is elvégezhető vele.

Bármilyen x-re, törtre, negatívra is alaptétel a következő:

$$\boxed{x^0 = 1}$$

Egyismeretlenes egyenlet megoldása nem nagy ügy, gyakorold. Mindig az egyenlet mindkét oldalával pontosan ugyanazt a műveletet kell végrehajtani, úgy kavarva, hogy végül az az egy ismeretlen egy példányban önmagában megmaradjon valamelyik oldalon. Ha kivonást akarsz eltüntetni, akkor összeadsz, ha osztást, akkor szorzol, tényleg nevetséges lenne, ha ezt itt kellene megbeszélnünk.

Kétismeretlenes egyenletrendszerben ugyanezt csinálod az egyik egyenlettel, mindaddig, amíg az egyik ismeretlen önmagában az egyik oldalra kerül. Ekkor a másik egyenletet leírod úgy, hogy ott ennek az ismeretlennek minden előfordulása helyén a kapott helyettesítő képletet írod le, így végül lesz egy másik egyismeretlenes egyenleted, ami nem nagy ügy, lásd fent.

Az egyenletekben nem mindig hasznos az ismert számértékek azonnali behelyettesítése, sokat kell irkálni. Bátran hagyd ott a számításokban a jeleiket, és ráérsz behelyettesíteni, amikor már úgy lesz kényelmes. Egy általános képletben nincsenek is számértékek, és azokat is tudnod kell átrendezni, azért, hogy ne kelljen minden képletnek mindenféle alakját megjegyezned.

Másodfokú egyenlet

Nem tudom, hogy ezt tanultad-e már, de a gyorsuló mozgások képleteinek feladatban történő felhasználása esetén beleszaladhatsz. Meg kell tanulni hozzá egy formulát, a többi magától megy.

A másodfokú egyenlet attól másodfokú, hogy a keresett ismeretlen a második hatványon van, $\mathbf{x}^2$, mondjuk. Ha ugyanaz az ismeretlen nincs ott az egyenletben első fokon is (csak x), akkor a megoldás egyszerű, nézzünk egy példát, **t**-t keressük:

$$3 \cdot t = \frac{2a}{t} \quad | \cdot t$$

$$3 \cdot t^2 = 2a \quad | :3$$

$$t^2 = \frac{2a}{3} \quad | \sqrt{\ }$$

$$t = \sqrt{\frac{2a}{3}}$$

Szándékosan vettem bele még egy ismeretlent, merthogy attól sem kell megijedni.

Ha viszont ugyanaz az ismeretlen első fokon is benne van az egyenletben, akkor a teendő hosszabb. Először is egy

$$ax^2 + bx + c = 0$$

általános alakra kell az egyenletedet rendezni. Az a, b, c bármi lehet, itt a *szerkezet* a fontos. Tehát egy szorzóval (a) a másodfokú tag, egy példányban, másik szorzóval (b) az elsőfokú tag, szintén egy példányban, és esetleg van még egy ismeretlen nélküli tag is (c). A másik oldalon pedig nulla álljon. Bármi van is az a, b és c betűkkel jelölt helyeken, azokat be kell helyettesíteni **a másodfokú egyenlet megoldóképletébe**, amit tanulj meg kívülről:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ebből megkapod az ismeretlen értékét. A gyökjel előtt "plusz vagy mínusz" van, ez azt jelenti, hogy el kell végezned a számítást plusszal és mínusszal is, ez két eredményt (két gyököt) ad, amelyek közül választanod kell. (Az egyenlet gyöke, azaz eredménye, és a gyökvonás művelete két teljesen különböző dolog.) Ha a két eredmény valamelyike értelmetlen (például negatív idő jött ki), akkor az rossz gyök, és kizárod, nem játszik tovább. Ha a gyökjel alatt negatív szám jön ki, az kínos, mert a valós számok között nincs olyan, ami ennek megfelelne, negatív számra a négyzetgyök nem értelmezhető, vagyis nincs eredményed. Ilyen esetben, vagy ha mindkét kapott gyököd rossz, akkor nézd meg alaposan, hogy az ide vezető egyenletben nem rontottál-e el valamit, mert ritkán adnak fel megoldhatatlan feladatokat. Nézzünk példát, egy kicsit gyorsabban haladva. Az eredeti egyenlet:

$$2x - (x+1) = \frac{1-\sqrt{3}}{x} - 4{,}5$$ Ezt tovább alakítjuk.

$$x - 1 = \frac{1-\sqrt{3}}{x} - 4{,}5$$

$$x^2 - x = 1 - \sqrt{3} - 4{,}5x$$

$x^2 + 3{,}5x - (1-\sqrt{3}) = 0$ Ez az ún. nullára rendezett alak. Hasonlítasd össze az általános alak képletével, azonosítsd benne az a, b, c tagokat:

$a = 1 \quad b = 3{,}5 \quad c = -(1-\sqrt{3})$ Ha ezeket az **a**x^2+**b**x+**c**=0 általános képletbe visszahelyettesíted, akkor a megoldandó egyenletnél járunk, látod? Az egyenletünkben az x^2 előtt nem volt szorzószám, akkor az 1-gyel való szorzásnak vehető, így lett az a=1 megfeleltetés. Az általános alakban **+c** áll, ezért az azon a helyen levő kifejezést a negatív előjellel együtt kell átvennünk, ezt jól figyeld meg. Ugyanez lenne a másik két betű behelyettesítésekor is.

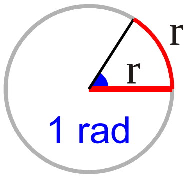
Megvan a kiinduló helyzet, ezt a három elemet a megoldóképletbe be kell helyettesíteni:

$$x_{1,2} = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-(1-\sqrt{3})\right)}}{2 \cdot 1}$$

Amíg nem megy jól, addig ne rövidíts, ne bűvészkedj, csak csináld, mint a gép, különben elronthatod.

Két számítást kell elvégezni, a két kapott eredmény: –0,223 és –3,277. **Mindkettőt vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletbe.** Ezzel a rossz levezetésünk okozta tévedést is is észrevehetjük. Most az egyik gyök nem is felel meg az eredeti egyenletnek, ez egy rossz gyök, a második viszont rendben van, tehát x=–3,277.

A radián



Elérkezett az idő, hogy a szögek mértékegységeként a fok helyett megismerd a **radián**t, ha még nem került erre sor. Az SI mértékegységrendszerben ez az előírt mértékegység, és akkor bizony a számításokban is ezt kell használni. Azért, mert ha a mértékegységekkel pontosan ugyanazokat a matematikai műveleteket végezzük el, amiket a számokkal, akkor végül a mértékegység helyes lesz, erről külön fejezetben olvashatsz kicsit később. Szóval annak érdekében, hogy a számítások eredménye számértékben és mértékegységben is rendben legyen, fokot csak akkor használhatsz, ha szögfüggvényt számítasz ki belőle (erről a következő fejezet szól), egyéb esetekben kénytelen leszel a radiánra rászokni. Egyébként nem nehéz.

Akkor tehát mi az a radián? Veszünk egy tetszőleges kört, és a sugarát felmérjük a kör vonalára. Ívben, nem egyenesen. Ha egyenesen tennénk, akkor kapnánk egy egyenlő oldalú háromszöget, és az 1 radián pontosan 60° lenne, de sajnos a helyzet nem ennyire szép.

1 radián az a szög, amelyet *a sugárral azonos hosszúságú* körív két végpontjától induló két sugár egymással bezár.

Másik megközelítés:

A radián egy körív és a hozzá tartozó sugár aránya.

Ha az ív hossza **h**, a sugár **r**, akkor az ívhez tartozó középponti szög nagysága **h/r** radián.

A radián értéke 57.2957795…°, sajnos végtelen és nem ismétlődő tizedes tört, emiatt fölösleges is a fokra váltásával próbálkozni, nem is nagyon van rá szükség. A radiánban kifejezett szögnek tulajdonképpen nincs mértékegysége, mert ahogy láttad, az csak egy *arányszám*, a számításokban egyszerű számként vesz részt, de ha kell, ki lehet írni mögé, hogy rad.

Ellenben jól tudjuk, hogy a kör kerülete $2r\cdot\pi$. Az ívhossz r, a kör ennek 2π-szerese, vagyis kijön, hogy

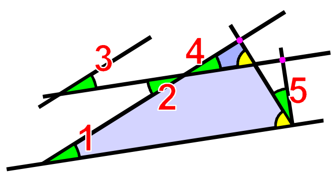
a teljes kör = $360° = 2\pi\ \mathrm{rad}$

Ha tehát egy szöget fokban kapunk meg, akkor osztjuk 360-nal, visszaszorozzuk 2π-vel, és kész. A számológépeken általában van olyan funkció, ami a π értékét adja meg, ezért nem kell kézzel beírni a 3,14-et, az úgysem elég pontos.

Azonos szögek

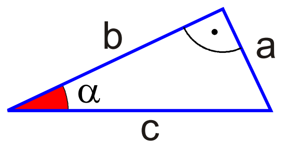
Egymást metsző vonalak között azonos szögek is létrejönnek, néha hasznos ezeket felismerni.

1-3, 3-4: **Ha két szög szárai páronként párhuzamosak, akkor a szögek egyenlők.** (Párhuzamos szárú szögek.)
2-4: **Az X alakú vonalak sarkaiban levő szögek egyenlők.** (Csúcsszögek.)
1-2, 2-3: **A Z alakú vonalak sarkaiban levő szögek egyenlők.** (Váltószögek.)
1-4: **Két hasonló háromszög szögei páronként egyenlők.**
4-5: **Ha van két szögünk, amelyeknek a szárai páronként merőlegesek egymásra, akkor az a két szög egyenlő.** (Merőleges szárú szögek.)



Szögfüggvények

Légy szíves, és tanuld meg kívülről a **szögfüggvények** alábbi képleteit, mert sokszor kell. Kizárólag derékszögű háromszögekben használhatók. Az a céljuk, hogy ha a háromszög egyik oldalát és az egyik hegyesszögét ismerjük, akkor ezekkel a függvényekkel kiszámíthassuk a többi oldalát. (Megjegyzem, ha az egyik hegyesszöget ismered, akkor ismered a másikat is: 90°–α.)



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \left(\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}\right)$$

Vigyázz, nehogy a betűket a rajz nélkül tanuld meg! Ha egy példában más betűk állnak a háromszög mellett, esetleg el van forgatva, ne legyél megzavarodva. Ezért is tanítják "mondókával" ezeket: *a szinusz a szöggel szembeni befogó per átfogó, a koszinusz a szög melletti befogó per átfogó, a tangens a szöggel szembeni befogó per szög melletti befogó, a kotangens pedig a tangens reciproka.* Tanuld meg kívülről, halálbiztosan.

A szögfüggvények tehát a szög alapján adják meg a derékszögű háromszög két oldalának arányát. Például: ha ismered a **c** oldalt és az **α** szöget, akkor a **b** oldalt úgy tudod kiszámítani, hogy

$$b = c \cdot \cos\alpha$$

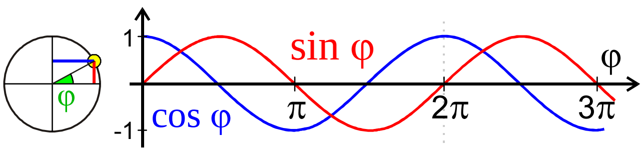
A cos α (és a többi is) egy szám, amit a számológép a szög beírása után kiszámol. ***Ellenőrizd***, hogy ha a szöget fokban adod meg, akkor a **DEG** jelzés legyen a kijelzőn, ha pedig radiánban, akkor **RAD**. Lehet, hogy a te számológéped nem tud ilyet, esetleg másképp jelzi, ezt neked kell kiderítened.

A szinusz és koszinusz értéke mindig +1 és -1 közötti érték lesz. A tangens értéke a végtelenig terjedhet (de 90°-nál nem értelmezhető).

Visszafelé: két ismert oldal hosszának arányából a szög is megtudható, ehhez a szögfüggvények ellentett műveletét kell elvégezni, ahogy például a négyzetre emelés ellentettje a gyökvonás. A koszinusz ellentettje az "arkusz koszinusz" (az arcus jelentése ív), a jelzése 'arc', így:

$$\mathrm{arc}\cos\frac{b}{c} = \alpha$$

A számológépeden ehelyett valószínűleg a gombok fölötti műveletekhez szükséges gombot kell használnod, például `12 ÷ 43 =` **`INV cos`**, az eredmény 73,8° vagy 1,29 radián.



Nem különösebben fontos, de azért megemlíthetem, hogy a szögfüggvények valójában egy körből vannak származtatva. Ha egy pontot körbejáratunk, akkor a távolsága a két központi tengelytől jellegzetes hullámvonalakkal ábrázolható, amelyek *periódushossza* 2π.

Pitagorasz-tétel

Jól ismert tétel, amit szintén csakis derékszögű háromszögeknél használhatunk, akkor, amikor két oldalból a harmadikat akarjuk megtudni. Lehetne szögfüggvényekkel is, csak ez sokkal egyszerűbb. Az előbb látott háromszög jelöléseit használva

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ha ismerjük például **b** és **c** értékét, **a**-t keressük, akkor az egyenlet átrendezésével ez lesz a megoldás:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}\ .$$

Vektorműveletek

A **szakasz** egy egyenes vonalnak egy fix hosszú darabja. A szakasz hossza másképpen a két végpont távolsága.

A **vektor** egy olyan *irányított* szakasz, amelynek a rajzolásakor az egyik végére nyílfejet rajzolunk. Ismernünk kell a vektor kezdőpontját, a nagyságát és az irányát is, ennyivel több az egyszerű szakasznál. Akkor használjuk, ha valamilyen megjelölendő dolognak ezek a lényeges tulajdonságai, például az *erő* ábrázolására, aminek van kezdőpontja (támadáspontja), nagysága és iránya. A vektor egyenese, vonala, a fizikában a vektor **hatásvonal**a az a végtelen hosszú egyenes vonal, amelyre a vektor vonala illeszkedik.

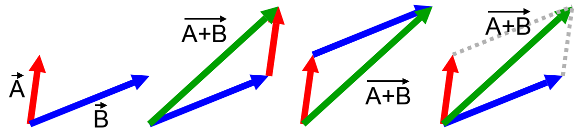
Ha egy bizonyos mennyiségnek nem csak a nagysága, hanem az iránya is fontos, akkor azt mondjuk, hogy az egy vektormennyiség. Ha ezt írásban hangsúlyozni akarjuk, akkor kis nyilat teszünk fölé, így:

$$\vec{a}$$

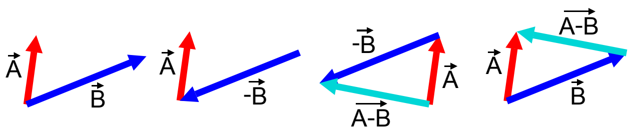
A matematika megmutatja, hogyan kell a vektorokkal dolgozni, a fizika pedig okot ad rá. Tipikusan vektormennyiség például az erő, a sebesség, a gyorsulás és az impulzus.

Összeadás: *Adott egy A és egy B vektor, szerkesszük meg a két vektor összegvektorát!* Három módszert láthatsz, az első kettőn szó szerint össze vannak adva a vektorok, egymás mögé illesztve, csak a sorrend kétféle. A harmadik módszer a **parallelogramma-szabály**, tulajdonképpen az első két módszer együttes használata. Matematikában a három módszer bármelyike bármikor használható, a kedved szerint. Fizikában erővektorok összegének (lásd az EREDŐ ERŐ fejezetet) kiszámításához a harmadik módszert használd, más vektorszámításokhoz az összeillesztős módszerek is jók.

Ha a zöld vektor a piros és a kék vektorok összege, akkor a piros és a kék vektorok a zöld vektor **összetevői**, más szóval **komponensei**.



Kivonás: *Adott egy A és egy B vektor, szerkesszük meg az A–B különbségvektort!* Az első lépés azt mutatja, hogy az A–B művelet hogyan lesz összeadássá tehető, a B helyére a –B vektort téve. Ezután az A-hoz hozzáadva a –B-t megkapjuk az eredményt. Az utolsó rajzon ennek egy gyorsított változata van; arra kell mindig emlékezned, hogy a különbségvektor "a másodikból az elsőbe" mutat.



Számok normál alakja

Fizikapéldákban mindig akadnak számok, amelyekben sok nulla van. Ezeket a nullákat számolgatni kicsit kényelmetlen, és benne van a tévesztés lehetősége is. Ezért szokás használni a **normál alak**ot, ami két részből áll: elöl van a *mantissza*, ami mindig egy 1 és 9.999… közötti szám, utána jön az *exponens*, ami a tíz valamilyen hatványa, a szám pedig a kettő szorzata. (A két szót nem fontos megtanulnod, nem fogja kérdezni tőled senki.) Lássunk egy példát:

$$2{,}39 \cdot 10^{5} = 239000$$

Gyakorlatilag 5 helyiértékkel jobbra vitted a tizedesvesszőt, erre nyilván emlékszel. Negatív hatványkitevővel is működik:

$$1{,}007 \cdot 10^{-4} = 0{,}0001007$$

itt meg balra vitted a tizedesvesszőt, ennyi az egész. A dolog egyébként egyenesen következik abból, amit a hatványozásról korábban egyeztettünk. A nagyon nagy és nagyon kicsi számokat okosabb normál alakban ábrázolni, mint a nullákat számolgatni.

$$0{,}000000000067 = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$$

Főleg akkor jön jól ez a módszer, ha nagyságrendek (vagyis a tíz hatványai szerinti lépcsők) közötti átváltásokra van szükség, a következő fejezetben szükség lesz rá.

Lássunk egy feladatot, amilyennel találkozhatsz is: Mekkora tömegvonzási erő hat egy 200 tonnás testre, ha annak a Föld középpontjától való távolsága 6380 km? (Ez a felszín felett 7 km magasságot jelent.) A képlet:

$$f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ahol f az előbb látott szám (a gravitációs állandó), m_1 a Föld tömege *kilogrammban*, egy adat szerint $5{,}9736 \cdot 10^{21}$ tonna, m_2 a test tömege szintén *kilogrammban* (itt 200 tonna), r pedig a távolság *méterben*. A képlet megvan, csak ki kell számolni. Azt tudjuk, hogy a tonna 1000 kg, a kilométer 1000 m. Egy lehetőség:

$$0{,}00000000067 \cdot \frac{5973600000000000000000 \cdot 1000\ \text{kg} \cdot 200 \cdot 1000\ \text{kg}}{(6380 \cdot 1000)^2\ \text{m}}$$

Elég eszelős dolog. Ha elkezdesz egyszerűsíteni nullákkal, ezrekkel, az persze segít valamit. Lehet, hogy véletlenül el is számoltam a nullákat, veled is megtörténhet. Örülnék, ha nem ilyesmivel vesztegetnéd a drága idődet, *a számológéped nem is tud ennyi nullát kezelni*, ezért vegyük a másik lehetőséget, vegyük a számokat a kapott alakokban, belevéve az átváltásokat is:

$$6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}9736 \cdot 10^{21} \cdot 1000 \cdot 200 \cdot 1000}{(6380 \cdot 1000)^2} \quad *$$

Ha nem okoz gondot, akkor ehelyett egyből csinálhatod úgy is, hogy minden számot a normál alakjában írsz le:

$$6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}9736 \cdot 10^{21} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 1 \cdot 10^3}{(6{,}380 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3)^2}$$

Mivel már nem vagyunk ovisok, az "1·"-eket a továbbiakban lenyeljük. Nagyon lassan haladok, leírom ugyanezt úgy, hogy csak praktikusabbra átrendezem a törtet, aztán a nevezőt is felbontom:

$$= \frac{6{,}7 \cdot 5{,}9736 \cdot 2 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{21} \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^3}{(6{,}380 \cdot 10^3 \cdot 10^3)^2} = \frac{6{,}7 \cdot 5{,}9736 \cdot 2 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{21} \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^3}{6{,}380^2 \cdot 10^6 \cdot 10^6}$$

A nem tízes hatványokat számoljuk ki külön, és utána végre tegyük rendbe a többit:

$$\frac{6{,}7 \cdot 5{,}9736 \cdot 2}{6380^2} \cdot \frac{10^{-11+21+3+2+3}}{10^{6+6}} = 1{,}967 \cdot 10^{-11+21+3+2+3-(6+6)} = 1{,}967 \cdot 10^6$$

Tehát az erő majdnem két millió akármi, kivételesen a mértékegységgel most nem foglalkozunk.

Lehet, hogy most azt mondod, hogy akkor inkább már írogatod a nullákat. Nincs igazad, először is mert ahogy mondtam, a számológépbe nem írható be ennyi nulla, leírva el is tévesztheted a számukat, és az egyszerűsítésük is számolgatást kíván, vagyis azzal is babrálni kell. De van még egy érvem.

A számológépeden kell lennie egy EXP jelű gombnak (exponens, hatványkitevő). Ha nincs, és más néven sincs ilyen, akkor azt javaslom, hogy vegyél egy komolyabb ("tudományos") számológépet, nem kerül sokba, szögfüggvényeket, hatványokat is tud kezelni, megtérül az ára.

> Figyelj arra, hogy normál vagy D.A.L. rendszerűt veszel. A sin 30-at a szokásos gépeken így kell kiszámolni: `3 0 sin`, a másikon `sin 3 0 =`. Mindkettőnek megvan a maga előnye.

Szóval ez a gomb kimondottan a normál alakok használatára van. Az EXP gomb a "$\cdot 10^x$" lépést helyettesíti, tehát a bal oldali számot a jobb oldali módszerrel pötyögd be:

$6{,}7 \cdot 10^{-11}$ **`6 . 7 EXP 1 1 +/-`**

Az a gépedtől függ, hogy ez hogyan jelenik meg a kijelzőn, lehet, hogy így: **`6.7 -11`**. Nézz utána. Jegyezd meg, hogy ez a **$6{,}7 \cdot 10^{-11}$**-et jelenti, és használd bátran a lehetőséget. A gép egyébként még segít is, mert ha beírod azt, hogy `43821 EXP 7`, akkor magától átalakítja valódi normál alakra: $4{,}3821 \cdot 10^{11}$.

Ennek a funkciónak a használata azért különösen javasolható, mert akkor neked nem is kell a nagyság-rendekkel foglalkozni, azt elintézi a gép. Vagyis a fent alaposan részletezett számítás helyett ha közvetlenül a *csillaggal jelölt számítást írod be az EXP használatával, akkor az eredményt azonnal megkapod. Egy gondos tanulmányozást a fenti téma tehát nagyon megér, súlyos perceket fogsz spórolni vele a dolgozatokon, házi feladatokban.

Prefixumok

A prefixum a mértékegységek elé tett olyan szavacska, amely a nagyságrendet jelöli. 1 kilogramm egyenlő ezer grammal, a "kilo" a **prefixum**, előtétszó, előtag, nevezd kedved szerint.

Az SI mértékegységrendszerben nemzetközi szabvánnyal rögzítették a használható prefixumokat, ezekből a számunkra érdekes nagyságrendekhez tartozókat összeszedem, jó lenne ezt is megtanulnod mielőbb. Ha az itt fel nem soroltakat is látni akarod, szerintem a függvénytáblázatodban is ott vannak.

peta	**P**	billiárd	10^{15}				
tera	**T**	billió	10^{12}	milli	**m**	ezred	10^{-3}
giga	**G**	milliárd	10^{9}	mikro	**μ**	milliomod	10^{-6}
mega	**M**	millió	10^{6}	nano	**n**	milliárdod	10^{-9}
kilo	**k**	ezer	10^{3}	piko	**p**	billiomod	10^{-12}

Amint látod, nagyon nem mindegy, hogy kis- vagy nagybetűvel írod a prefixum jelét. Figyeld meg, hogy a 10 hatványai hármasával lépegetnek, így elég könnyű megjegyezni őket. Még négy olyan prefixum van használatban, amelyek igazából nem tartoznak a szabványok közé, de szabad a használatuk:

hekto	**h**	száz	10^{2}	deci	**d**	tized	10^{-1}
deka	**dk***	tíz	10^{1}	centi	**c**	század	10^{-2}

*A deka hivatalos jele a "da", de nálunk már régóta a "dk" van használatban, ezért ezt használd, ha a tanár mást nem mondott.

Az Egyenlítő hossza 40 Mm, vagy 0,04 Gm. 0,00000347 mg=3,47 ng. 2 ps=$2\cdot10^{-27}$ Ps.

Két prefixumot egymás mellé tenni nem szabad, vagyis nincs megakilo vagy hasonló.

Nem egészen ide tartozik, de nem biztos, hogy hallottál arról, hogy az informatikában a tárolóterületek méréséhez ezeknek a prefixumoknak a használata már szabálytalan, úgyszólván tilos. Helyettük az ún. bináris prefixumok használata kötelező, tehát kibibyte vagy kibyte (KiB), mebibyte vagy mibyte (MiB), gibibyte vagy gibyte (GiB), tebibyte vagy tibyte (TiB), pebibyte vagy pibyte (PiB). Abban térnek el a decimális prefixumoktól, hogy nem 1000^1, 1000^2, 1000^3 stb., hanem 1024^1, 1024^2, 1024^3 stb. a váltószámuk, ennek a kettes számrendszerhez van köze.

Mértékegységek

Az SI rendszer (*Système international d'unités*), a jelenleg világszerte hatályos nemzetközi mérték-egységrendszer az elődeihez hasonlóan megállapított olyan alapmértékegységeket, amelyekre minden más mértékegységet visszavezet. A 7 alapegység a következő:

hossz	**méter**	**m**
tömeg	**kilogramm**	**kg**
idő	**másodperc** (szekundum)	**s**
áramerősség	**amper**	**A**
hőmérséklet	**kelvin**	**K**
anyagmennyiség	**mol**	**mol**
fényerősség	**kandela**	**cd**

Bármilyen számítást végzel fizikai mennyiségekkel, mindig végezd el következetesen és pontosan ugyanazt a számítást a mértékegységekkel is.

Ha jól csinálod, akkor az eredmény mellé így kapott mértékegység is jó lesz, akkor is, ha a kiszámolt mennyiség mértékegységére esetleg nem emlékszel. Ha pedig mégis emlékszel rá, akkor az ered-ménnyel összehasonlítva észreveheted, ha rossz számítást végeztél. Nézzünk egy kitalált képletet:

$$Y=\frac{m^2\cdot s\cdot M}{T\cdot p}$$

hozzátéve, hogy $M=F\cdot k$ és $p=\frac{F_{ny}}{A_{ny}}$. *Vigyázz, ezek a **képletek**, nem a mértékegységek!!*

Tudod, hogy mi az Y mértékegysége? Nem baj, ha nem – én sem. Majd mindjárt megszüljük. Most megadom a mennyiségekhez tartozó **mértékegységek**et, és nem érdekes, hogy ezek mik.

$$[m]=kg \quad [s]=m \quad [F]\,\text{és}\,[F_{ny}]=\frac{kg\cdot m}{s^2} \quad [k]=m \quad [A_{ny}]=m^2 \quad [T]=s\,.$$

A feladatban nyilván meg vannak adva a szükséges számértékek is, de most mi intézzük el a mértékegységet, elvégezve a képletek és mértékegységek behelyettesítésével az előírt műveleteket:

$$[Y]=\frac{kg^2\cdot m\cdot\left(\frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot m\right)}{s\cdot\left(\frac{\frac{kg\cdot m}{s^2}}{m^2}\right)}$$

Megcsinálom az egyszerűsítéseket:

$$=\quad kg^2\cdot m\cdot\frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot m\cdot\frac{m^2}{s\cdot\frac{kg\cdot m}{s^2}}\quad=\quad\frac{kg^2\cdot m^4}{s}$$

Bármit jelentsen is az az Y, itt áll a mértékegysége.

Tegyük fel, hogy a kg·m^2-nek van valami saját neve is, mondjuk Th. Tehát 1 Th = 1 kg·m^2. Akkor az eredmény mértékegysége így irható le:

$$\frac{Th^2}{s}$$

Ha tudod, hogy az Y-nal jelölt mennyiségnek pont ez a helyes mértékegysége, akkor így ellenőrizted azt is, hogy a számítási képleteket jól írtad fel. Emlékeztetlek, hogy ez csak egy kitalált példa volt.

Örömmel olvasnám a véleményedet, a kívánságaidat. Azt, hogy mit kellene másként csinálnom ahhoz, hogy ezt a könyvet jobban használhasd, az iskolai munkád kiegészítéséül.
A fizikasegitseg@lajt.hu címre írhatsz.

Felhasznált képek:

Stabilitás
http://www.strangedangers.com/images/content/108744.jpg

Inerciarendszer
2001: Űrodüsszeia (1968) (http://www.port.hu/2001_-_urodusszeia_2001:_a_space_odyssey/pls/w/films.film_page?i_film_id=38821)

Ütközési alapszabályok
http://s3.thcdn.com/productimg/0/600/600/76/10996876-1412100458-178520.jpg

Centrifugális erő
2001: Űrodüsszeia (1968)

Perdület (impulzusmomentum)
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turbogenerator01.jpg

Lendkerék, motornyomaték
http://olx.hu/hirdetes/polonez-fso-lendkerekes-auto-retro-alvaz-alkatresz-ID18YU9.html
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gyroscope_operation.gif
http://www.tanszertar.hu/eken/2006_01/nadasi_06_01_elemei_2/nadasi_060126.htm
http://optomi.blog.hu/2009/10/25/mozdonyfesztival_es_skanzen

Perdületmegmaradás
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NH-90_NATO_Frigate_Helikopter_%28NFH%29.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cup_of_Russia_2010_-_Yuko_Kawaguti_%282%29.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Breakdance#mediaviewer/File:120843583_e22b153125_o.jpg
http://sport365.hu/egyeni-sportok,hirek,mu--es-toronyugro-eb-sved-es-orosz-gyozelem,24871 (Barta Nóra)

Potenciális energia
http://help.divoke-kmene.sk/wiki/Katapult

Magassági energia
http://www.thatpetplace.com/core/media/media.nl/id.826/c.1043140/.f?h=8c34bcad22329b7854cd
http://laughingsquid.com/the-legendary-duff-beer-the-simpsons-fictional-beer-made-a-reality/

A Naprendszer
http://www.nasa.gov/images/content/746410main_May%203%20Flare%20171-304-131%20blend.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Sun_by_the_Atmospheric_Imaging_Assembly_of_NASA%27s_Solar_Dynamics_Observatory_-_20100819.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helmet_streamers_at_max.gif
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sunspot_vtt.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solar_system_scale-2.jpg

És tovább!
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andromeda_Galaxy_%28with_h-alpha%29.jpg

Űreszközök
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sputnik_asm.jpg
http://www.astronautix.com/astros/farkas.htm
http://www.astronautix.com/astros/magyari.htm
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pioneer_plaque.svg