A logika története

Kutrovátz Gábor előadásai alapján készítette

Kiss-Tóth Christian

ELTE TTK

Budapest, 2006. december

1. előadás

2006. szeptember 13.

A logika története három nagy korszakból áll:

- Ókori görög logika (i.e. 4-3. század),
- Késő középkori logika (13-14. század),
- Modern logika (19. századtól napjainkig).

A középkorban leginkább a nyelv és a valóság kapcsolatát vizsgálják, míg a modern kori logika inkább a matematikához kapcsolódik.

A logika a következtetés a bizonyítás és az érvelés tudománya. A legbiztosabb tudás forrása a tapasztalat, de a tudásnak a túlnyomó része nem ebből szárzmazik. Egy tudásnál a leglényegesebb szempont az az, hogy megbízható legyen a forrás, és ne mondjon ellent az eddigi tapasztalatoknak.
A következtetés azt jelenti, hogy tudok bizonyos dolgokat, és ezek miatt következtetünk új ismeretekre. Jól megalapozott tudás és helyes következtetés eredményeképpen új jó tudáshoz jutunk. Arisztotelész mondta azt, hogy csak azért, mert bizonyos dolgokat tudok, új dolgokat tudhatok meg következtetéssel.

A logika története ott kezdődik, ahol elkezdenek gondolkodni a helyes következtetési formákról. A logika történetét Arisztotelésztől számítjuk (i.e. 4. század). A görögök használtak először érveket ls tudatos következtetéseket. A kínaiak és az európaiak nem hatottak annyira a logikára. Létrejöttek azok a gondolkodási alapok, amelyek ma is meghatározóak (demokratikus berendezkedés). A különböző álláspontok egyenrangúak az érvelés során. Az érvelés a következő területeken jelent meg:

Görög jog: Főleg Athénban volt jellemző, sok esküdt, akik kevés fizetést kaptak, és vádirat és védőirat alapján döntöttek. Megismerkedtek az alapvető érvelési struktúrákkal.

Görög matematika: (i.e. 5. század) A görög matematikában az érvelés alatt bizonyítást kell érteni, rajtuk kívül senki sem bizonyított még akkoriban. Máshol azt nézték, hogyan tudják az összefüggéseket használni, a görögök pedig azt, hogy ezekre hogyan jönnek rá. Bebizonyították, hogy a négyzet oldala és átlója nem összemérhető.
Rájöttek, hogy úgy lehet a matematikát biztosan felépíteni, hogy megegyeztek bizonyos tételekben, axiómákban, és deduktív úton látják be az állításokat. A legismerebb *Euklidész: Elemek* című műve.

Görög filozófia: **Parmenidésznél** (i.e. 6. század) találkozunk az első érveléssel egy verses költemény formájában. A görögök szerint a tapasztalatban nem bízhatunk, az érzékszervek megcsalhatnak minket, csak a gondolkodásra kell hagyatkozni.
Zénónhoz (i.e. 5. század) köthetjük az *apóriákat*, vagyis az olyan érveket amelyekből nincs kiút. Ezek az érvek többségében a mozgáshoz kapcsolódnak:

- *Akhilleusz és a teknős*: Akhilleusz és a teknős versenyeznek, a teknős kap egy méter előnyt. Ekkor Akhilleusz sosem éri utól a teknőst, hiszen először megtesz egy métert, de addigra a teknős odébbmegy, ledolgozza ismét a hátrányát, de addigra a teknős ismét odébbmegy, és így tovább a végtelenségig.
- *Nyíl*: egy nyílvessző nem juthat el sehova, hiszen ha egy adott pillanatban vagy ott van ahol van, vagy nincs. Ha nincs az baj, ha pedig ott van, akkor áll, vagyis a nyílvessző minden pillanatban egyhelyben áll.
- *Stadion érv*: A futó sosem tudja körbefutni a stadiont, mert először el kell jutni a feléig, ahhoz a negyedéig, és így tovább a végtelenségig.
- *Mozgó sorok*: Ha három sor mozog egymás alatt, a második sor a felsőhöz képest eggyel balra, a harmadik sor eggyel jobbra, akkor a második sor kettővel mozog balra a harmadikhoz képest, ami ellentmondás.

I.e. 5. században megjelentek a **szofisták**, akik pénzért tanítanak. Érvekkel foglalkoznak, és az a jó szofista, aki a vitában felül marad. Szabályokat alkotnak, és szabályos vitákat tartanak. Szókratész (480-399) fellépett ellenük, mert úgy gondolta, hogy a beszélgetés célja az igazság, nem pedig a haszonszerzés. Az igazsághoz nem fűződhet érdek.

2. előadás

2006. szeptember 27.

Platón (427−347) a Platón féle iskola megalapítója párbeszédes műveiben tanulmányozta a logikát, és a következőképpen építte fel a logikát:

$$\text{állítás} \rightarrow \text{következmények} \rightarrow \text{ellentmondás.}$$

Az ellentmondásnak három fajtáját különböztette meg:

- Egymással ellentmondó következményeket kaptunk. Ez a legtisztább ellentmondás.
- Egy korábban elfogadott állításnak ellenmondó következményre jutottunk.
- Nyilvánvalóan igaz dolognak mondd ellent az egyik következmény.

Ez a logika ez arra alkalmas, hogy állításokat cáfoljunk, de arra nem alkalmas, hogy bizonyítsunk. Ez természetesen csak a filozófiai bizonyításra igaz, mert a matematikában ez a bizonyítási forma az indirekt bizonyítás kiválóan alkalmazható. Ott elfogadunk bizonyos megkérdőjelezhetetlen állításokat (axiómákat), és abból vezetünk le következményeket.
Platón a műveiben megfogalmazta a következő logikai elveket:

- Ugyanazzal a dologgal szemben nem lehet két ellentétes dolog is igaz.
- Ha két dolog azonos, akkor azonos tulajdonságokkal rendelkeznek. Ugyanakkor ha különböző tulajdonságaik vannak, akkor nem lehetnek azonosakk.
- Ha egy állítást cáfolunk, akkor azzal együtt a következményeit is el kell vetnünk.

Arisztotelész (384-322) műveinek csak a 60%-a maradt ránk, mert gondolati egy időben nem voltak népszerűek, így műveinek egy része elveszett. Ő hozta létre a logika tudományát, logikai tárgyú művei:

1.) Kategóriák, 2.) Hermeneutika, 3.) I. analitika,
4.) II. analitika, 5.) Topika, 6.) Szofisztikai cáfolások.

Ha korban szeretnénk elhelyezni ezeket a műveket, akkor a Kategóriák, a Hermeneutika és a Szofisztikai cáfolások korai művek, a Topika is még korainak számít, míg az I. és II. analitika azok igazán érett alkotások.
A felsorolás első három műve a tiszta logikáról szól. A Kategóriák a fogalmakkal a Hermeneutika a mondatokkal, míg az I. analitika a következtetésekkel foglalkozik. A művek második csoportja az alkalmazott logika témakörébe sorolható, hogy hol lehet a logikát alkalmazni. Ezen belül a II. analitika a tudományelmélettel, a Topika a nem biztos következtetések tudományával, míg a Szofisztikai cáfolások vitákkal és félrevezető vitákkal foglalkozik.

Arisztotelész rendszerezte is a tudományokat. Legmagasabb rendű tudományoknak a teoretikai tudományokat tekintette. Ezen belül is rendszerezte a különböző tudományágakat:

	mozgó	moztulatlan
önálló	fizika	metafizika (I. filozófia)
önállótlan	$\emptyset$	matematika

A következő csoportot a poétikus tudományok, a mesterségek alkották. Ezután pedig a praktikus tudományok, mint a politika és az etika. Arisztotelész a logikát egyik csoportba sem sorolta be. Úgy tekintett a logikára, mint egy előtanulmányra, a tudományok eszközére, amit mindenkinek tanulnia kell.

A **Kategóriák** című művében ismerteti a legáltalánosabb állítmányfajtákat, 10 csoportot sorol fel:

1.) szubsztancia, 2.) mennyiség, 3.) minőség, 4.) viszony, 5.) cselekvés, 6.) szenvedés, 7.) hely, 8.) idő, 9.) állapot, 10.) helyzet.

A szubsztancia a legmagasabb szintű kategória, például szubsztancia az, hogy *Ember vagyok.* Az állítmányfajtákat Arisztotetész rendszerezi még önállóság szerint (önálló - önállótlan) és faj – nem viszony alapján (szín – piros). A faj – nem viszony relatív, egy állítmány egy adott esetben mind a kettő lehet. Vannak azonban olyan állítmányok, amelyek csak nemek, vagy csak fajok lehetnek.

A **Hermeneutika** című művében Arisztotelész kétféle témakörrel foglalkozik, a jelentéselmélettel, és a kijelentéselmélettel.

Jelentéselmélet szempontjából három dolgot különböztet meg Arisztotelész:

$$\text{dolgok} \overset{\textit{lenyomat}}{\longrightarrow} \text{lelki tartalom} \overset{\textit{lenyomat}}{\longrightarrow} \text{beszéd} \overset{\textit{lenyomat}}{\longrightarrow} \text{írás.}$$

Arisztotelész szerint a dolgoknak szükségszerű lenyomata van az emberek lelkében, és ennek esetleges lenyomata az ember beszédében. Ennek lenyomatát az írásban Arisztotelész nem vizsgálta, hiszen a beszéd és az írás nagyon sokáig együtt járt, érdekesség, hogy csak a középkortól jelent meg a néma olvasás, addig amit éppen leírtak, leginkább ki is mondták. Felmerül még Arisztotelészben az a kérdés, hogy a beszéd mögött kell-e szükségszerűen valós dolognak állnia, mint például a kecskeló, vagy a kentaur esetében.

Kijelentés egyik definíciója az, hogy olyan állítás, amely logikailag lehet igaz, vagy hamis. Nem kijelentés az, hogy *Jó napot kívánok!*, vagy az hogy *Egyszer volt, hol nem volt...*. Másik lehetséges definíció, hogy a kijelentés egy alany – állítmány szerkezetű mondat, ahol egy névszó egy másik névszó, vagy ige terjedelmébe esik: A *est* B, ahol A az alany, B az állítámány. Kijelentés példul az, hogy *Beteg vagyok.* Ebben az esetben egy fő, konkrétan az aki ezt mondja a betegek halmazába esik. Amikor azt mondjuk, hogy *Az ember halandó*, akkor az emberek halmazát soroljuk bele a halandó dolgok halmazába.
Nem számít precíz definíciónak, de azt mondjuk, hogy egy kijelentés akkor igaz, ha megfelelő viszont állít fel. A mai napig sem igen sikerült jobb definíciót mondani.

Arisztotelész különböző állításokat, szabályokat is megfogalmaz amelyeknek teljesülnie kell. Ilyen például, hogy *A est B* és *A nonest B* egyszerre nem teljesülhet. Ezt mai szóhasználattal az ellentmondásmentesség elvének mondanánk. Megfogalmazza továbbá, hogy ha A egy alany, B pedig egy állítmány, akkor vagy *A est B*, vagy *A nonest B* teljesül, más lehetőség nincsen. Erre mondanánk ma, hogy a kizárt harmadik elve.

Arisztotelész a kijelentéseket kétféle szempont alapján is rendszerezte.

állítmány szerint	→	állítás	*A est B*,
	→	tagadás	*A nonest B*,
alany szerint	→	egyetemes	*Minden ember halandó*,
	→	részleges	*Néhány ember filozófus.*

Az olyan egyedi kijelentések, mint példul az, hogy *Kutrovátz Gábor beteg*, a tudományok számára teljesen érdektelenek. Ezek alapján négy csoportot állíthatunk fel:

$\underline{\underline{a}}$	egyetemes állító	*Minden gyík zöld.*,
$\underline{\underline{i}}$	részleges állító	*Van zöld labda.*,
$\underline{\underline{e}}$	egyetemes tagadó	*Egyetlen gyík sem egér.*,
$\underline{\underline{o}}$	részleges tagadó	*Van olyan kacsa ami nem zöld.*

Az a és az i betűk az *affirmo* állítás, az e és az o a *nego* tagadás szónak a hangzói. Ha ugyanazzal az alannyal és állítmánnyal alkotunk mondatokat, akkor a következő összefüggéseket állíthatjuk fel a megfelelő mondantot:

$\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{o}}$ ellentmond egymásnak,
$\underline{\underline{e}}$ és $\underline{\underline{i}}$ ellentmond egymásnak,
$\underline{\underline{a}}$-ból következik $\underline{\underline{i}}$ (feltéve, ha létezik az alany),
$\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{e}}$ ellentétben állnak egymással (feltéve, ha létezik az alany).

3. előadás

2006. október 4.

Arisztotelész **I. analitika** című műve a következtetéselmélettel (szillogizmus) foglalkozik. A szillogizmus szó a *szil = összetétel* és a *logosz = mondat* szavakból származtatható. A következtetést úgy írták körül akkoriban, hogy csak azért, mert elfogadunk egy mondatot igaznak, vannak olyan mondatok, amelyeket szintén szükségszerűen el kell fogadnunk.

Felmerül a kérdés, hogy hány mondatot kell elfogadnunk igaznak ahhoz, hogy valamilyen következtetést levonhassunk. Az Arisztotelészi logika szabályai szerint legalább két kijelentésnek kell igaznak lennie ahhoz, hogy bármiféle következtetést is le tudjunk vonni.
A modern logika szerint azonban helyes következtetés levonásához már egy, illetve nulla állítás is elegendő. Erre a két esetre példa az, hogy abból a mondatból, hogy *Ma szerda van* következik, hogy *Ma kedd, vagy szerda van.* És vannak olyan alapállítások, amelyeknek a teljesüléséhez egyetlen kijelentést sem kell plusszban elfogadnunk, ilyen például az, hogy *Süt a nap.*

A kijelentések igazságértékének vizsgálatánál különböző paradoxonokban is ütközhetünk. Közismert paradoxon például az a mondat, hogy *Ez a mondat hamis*, vagy az hogy *Van olyan, hogy hazudok.* Az első mondatnál akkor is ellentmondásba ütközünk, ha hamis, és akkor is, ha igaz. A második mondat pedig arra példa, hogy ez a mondat csak igaz lehet.

Vizsgáljuk meg, hogy Arisztotelész szerint ahhoz, hogy két premisszából le lehetssen vonni egy konklúziót hány terminusnak kell szerepelnie a két mondatban. Könnyen látszik, hogy ha kettő vagy négy terminus szerepel a két mondatban, akkor abból nem tudunk semmilyen következtetést levonni:

textitMinden pók nyolclábú	*Minden madár tollas*
Minden madár tollas	*Egyetlen tollas sem madár*

Arisztotelész szerint egyik premisszapárból sem vonható le következtetés. Az is ugyanennyire nyilvánvaló, hogy három terminus esetén levonható következtetés. Ha az első mondat $A - B$, a második mondat $B - C$ alakú, ahol A, B és C a három terminus, akkor B az a terminus, ami összeköti a két állítást, és középső terminusnak nevezzük.
Aszerint, hogy B a két mondantban alany, vagy állítmány, három alakzatot különböztetünk meg:

1.) B az egyik mondatban alany, a másikban állítmány:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Minden bogár teve,}\\ \textit{Minden teve repül,}\end{array}}{\textit{Minden bogár repül.}}$$

2.) B mindkét mondatban állítmány.

Minden ember halandó,
Minden angyal nem halandó,
Egyetlen ember sem angyal.

3.) B mindkét mondantban alany.

Néhány ember filozófus,
Minden ember halandó,
Néhány filozófus halandó.

Vizsgáljuk meg, hogy ezek alapján hányféle szillogizmus lehetséges. Mivel mind a két premissza lehet négyféle, ($\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{i}}$, $\underline{\underline{e}}$ és $\underline{\underline{o}}$) és háromféle alakzat lehetséges így elvileg 48-féle szillogizmus képzelhető el. Arisztotelész megvizsgálta ezeket, és azt tapasztalta, hogy összesen 4+4+6=14 esetben vonható le következtetés a premisszákból. Később a középkorban 12 „jó” szillogizmust találtak, ugyanis akkor kapunk ennyit, ha nem tesszük fel mindenről, hogy létezik.

Arisztotelész az első alakzatból kinevezett két szillogizmust alapszillogizmusnak, és minden mást ezekre vezetett vissza. Ez a két szillogizmus a következő:

Minden nyúl emlős,
Minden emlős állat,
Minden nyúl állat.

Egyetlen ember sem kenutar,
Minden filozófus ember,
Egyetlen kentaur sem filozófus.

A szillogizmusoknak neve is van, a középkorban nevezték el őket. Az első a *Barbara* a második a *Celarent* szillogizmus. Az első betű az ABC betűi sorba (az első alakzat másik két szillogizmusa a *Darii* és a *Ferio*). A név másik három magánhangzója a premisszák és a konklúzió típusát adják meg. A *Barbara* szillogizmus például két egyetemes állító premisszából jut egy egyetemes állító konklúzióra.
Arisztotelész a többi szillogizmust a következő visszavezetési szabályok alapján vezette vissza erre a két esetre:

○ konverzió	$A\ \underline{\underline{e}}\ B$	$=$	$B\ \underline{\underline{e}}\ A$	*Egyetlen ember sem bogár,* *Egyetlen bogár sem ember.*
	$A\ \underline{\underline{i}}\ B$	$=$	$B\ \underline{\underline{i}}\ A$	*Van olyan ügyvéd, aki filozófus,* *Van olyan filozófus, aki ügyvéd.*
	$A\ \underline{\underline{a}}\ B$	$\Rightarrow$	$B\ \underline{\underline{i}}\ A$	*Minden ember halandó,* *Létezik halandó, aki ember.*

∘ oppozíció	$A \underline{\underline{a}} B$	$\leftrightarrow$	$A \underline{\underline{o}} B$	*Minden ember nyúl,*
				Van olyan ember, aki nem nyúl.
	$A \underline{\underline{e}} B$	$\leftrightarrow$	$A \underline{\underline{i}} B$	*Nem létezik szőrös kacsa,*
				Létezik szőrös kacsa.
	$A \underline{\underline{a}} B$	$\leftrightarrow$	$A \underline{\underline{e}} B$	*Minden kecske öreg,*
				Egyetlen kecske sem öreg.

A modern logika kialakulásáig Arisztotelész logikája a legjobb. Hibája azonban, hogy olyan kijelentésekből, mint például, hogy *Kovács Pista öreg* nem tud következtetni semmire, továbbá összetett mondatokat sem tud kezelni.

Arisztotelész a művében olyan szillogizmusokat is akar vizsgálni, amiben a *szükségszerű*, az *esetleges* és a *lehetséges* szavak találhatóak. Megpóbálja megvizsgálni, hogy ilyen esetekben milyen következtetéseket lehet levonni. Ezt azért találja fontosnak, mert Arisztotelész a mozgást és a változást is akarja tárgyalni.
Mit jelent az, hogy lehetséges, és az hogy szükségszerű? *Lehetséges, hogy piros ing, vagy szoknya van rajtam.* Ugyanakkor *Nem lehetséges, hogy két szivem legyen, vagy ne legyen agyam.* Hasonlóképpen *Szükségszerű, hogy fejem legyen*, és *Szükségszerű, hogy a krétának legyen kiterjedése.*
Arisztotelész osztályozza is ezeket a lehetőségeket. Vannak lehetetlen, esetleges és szükségszerű állítások. Lehetségesek azok az állítások, amelyek esetlegesek, vagy szükségszerűek.

Itt is felállíthatóak különböző szabályok:

lehetséges, hogy A = nem szükségszerű, hogy nem A,
Lehetséges, hogy a jövő héten piros ingbe jöjjek,
Nem szükségszerű, hogy a jövő héten ne piros ingbe jöjjek.

szükségszerű, hogy A = nem lehetséges, hogy nem A,
Szükségszerű, hogy legyen fejem,
Nem lehetséges, hogy ne legyen fejem.

Itt már 192 lehetséges szillogizmus van, Arisztotelész ezeket is végigvizsgálja, de ez már annyira eredménytelen, mint amennyire az eddigiek eredményesek.

A **II. analitika** című művében Arisztotelész a tudományelméletet tárgyalja szillogizmusok segitségével. A tudományos szillogizmustól két nagyon fontos elvárása van Arisztotelésznek, Az egyik az az, hogy a premisszák viágosak és nyilvánvalóak legyenek, a másik pedig az, hogy a premisszáknak okai legyenek a konklúziók. Vegyük például a következő szillogizmust:

A beárnyékolt testek sötétek,
A Hold holdfogyatkozáskor beárnyékolódik,

A Hold holdfogyatkozáskor sötét.

Itt az első premissza egy általános törvény, a második pedig egy adott tulajdonság, és ebből következtetünk a konklúzióra. Ennek azonban az Arisztotelészi logikát figyelembe véve számos hibája van. Az első, hogy a Hold egy egyedi dolog, és Arisztotelész szerint az egyedi dolgok a tudomány számára érdektelenek. A második igen nagy probléma az az, hogy a tudományos kutatás időbelisége nem felel meg a logika időbeliségének, ugyanis a fenti példa is mutatja, hogy nem arról van szó, hogy arra következtetünk, hogy a Hold holdfogyatkozáskor sötét. Ez is, és az első premissza is egy olyan állítás, amit megfigyeltünk, és ebből következtetünk arra, hogy a Hold holdfogyatkozáskor beárnyékolódik.

Hogyan küszöböljük ki ezt a hibát? Az első lehetőség az az, hogy lehessen visszafelé következtetni. Ez Arisztotelész szerint nem lenne logikailag helyes lépés. A második lehetőség az az, hogy a következtetések során lehessen körbe menni. Ez sem az igazi, mert ekkor a „levegőben lóg" a bizonyítás. A harmadik lehetőség amit Arisztotelész elfogad, az az, hogy legyenek kiindulási alapelveink, és ebből építkezzünk, és építsük fel a konklúziókat.
Arisztotelész a következő alapelveket különbözteti meg:

◦ axiómák	minden tudomány közös alapja, logikai alapelvek,
◦ hipotézisek	egy adott tudomány alapelvei,
◦ definíciók	egy adott tudomány létezői.

Vizsgáljuk meg, hogy Arisztotelész mit tekintett definíciónak. Szerinte a definíció megadja a definiálandó dolog nemét, és egy megkülönböztető jegyét, például *A kés vágó szerszám.* Itt a kés neme a szerszám, és a megkülönböztető jegy az az, hogy vág.
Ugyanakkor az nem jó definíciónak, hogy *Az ember két lábú állat*, mert ez alapján még kacsa is lehet, és az sem jó, hogy *Az ember két lábú tollatlan állat*, mert ennek még a kenguru is eleget tesz. Nem lehet tehát minden tulajdonság jó definíciónak, a definiálandó dolognak a lényegét kell megadni. Jelen esetben pedig az ember lényege, hogy racionális, vagyis, hogy eszes.

Arisztotelész a tudomány kutatást a következő lépések alapján építette fel:

1. Mi a dolog neve? Megnevezzük a dolgot amit kutatunk.
2. Létezik-e a dolog, amiről szó van?
3. Mi a dolog? Erre a kérdésre definíció kell legyen a válasz.
4. Mik a tulajdonságai? Erre lesz válasz a vizsgált tárgy nem lényegi ismertetőjelei (tollatlan, kétlábú).
5. Miért csak ezek a tulajdonságai?

Arisztotelész Platónnal ellentétben biztos alapokból épít szillogizmusok segítségével tudományt. Nála nincs például indirekt bizonyítás. Ennek az előnye, hogy a következmények biztosak, hátránya azonban, hogy ez a való életben nem megvalósítható. Arisztotelész meg is különböztet kétféle tudást. Az *episztémé* a teljesen biztos, a *doxa* pedig a valószínű tudás.

4. előadás

2006. október 11.

Az elmúlt két előadáson áttekintettük Arisztotelész műveit. Felmerülhet bennünk a kérdés, hogy miért az ő munkássága a legfőbb, amikor más irányzatok is voltak? A kérdésre az a válasz, hogy Arisztotelész munkássága maradt fenn számunkra. A keresztény korban a görög kultúra pogánynak számított, szerencsénkre azonban az arabok átmentették Arisztotelész műveit. Az ókori görög logikatörténetben még két főbb irányzatot tekintünk át részletesen. Az egyik a *megarei*, a másik a *sztoikus iskola*.

Megarei iskola

Ennek az iskolának négy fő képviselőjéről ejtünk egy pár szót

Megarei Eukleidész alapította az iskolát, nem azonos azzal az Eukleidésszel, aki az Elemeket írta. Szókratész tanítványa volt, aki négy iskolát is alapított. Ő maga még nem, de az utódai foglalkoztak logikával,

Eubülidész volt a paradoxonok atyja. Az ő nevéhez köthetőek az alábbi paradoxonok is:

- *csuklyás paradoxon*: Egy ember elé állítunk egy csuklyás alakot, és megkérdezzük tőle, hogy ismeri-e? Erre ő azt fogja válaszolni, hogy nem, mire mi megmutatjuk, hogy az illető valójában a saját bátyja. Ez a paradoxon inkább nyelvi jellegű.
- *szarvas paradoxon*: Először megkérdezünk valakit, hogy egyetért-e abban, hogy ami nem veszett el, az megvan. Erre a válasz nyilván igenlő, mire a következő kérdéssel azt kérdezzük, meg, hogy veszítettél el szarvakat. Erre az a válasz érkezik, hogy nem, amiből azt a konklúziót vonhatjuk le, hogy az illetőnek szarvai vannak.
- *hazug paradoxon*: Ezt már korábban ismertettük, annak a mondatnak a paradoxonát vizsgálja, hogy *Ez a mondat hamis.* Ezen paradoxon megoldására számos kísérlet született, de igazán jó megfejtést nem találtak rá. Az egyik próbálkozás az lenne, hogy megköveteljük, hogy egy mondat ne állíthasson semmit a saját igazságértékéről, de ezt is kijátszhatjuk az *Arisztotelész igazat mond*, *Szókratész hazudik* mondatpárral.
- *halom paradoxon*: Először megállapodunk abban, hogy egy szem homok a leesésekor nem ad hangot. Ebből azonban következik, hogy egy halom homok sem ad hangot, hiszen szemekre lebontva nincs hangja az esésnek. Ez a paradoxon az úgynevezett *fuzzy* paradoxonok közé sorolható, lényege, hogy nem tudunk éles határt vonni a fogalmak között, mint például *szem - halom.* Hasonló paradoxon a *kopasz ember paradoxona* is.

Diodórosz Kronosz nevéhez fűződik a győzedelmes érv kimondása, melynek lényege, hogy az alábbi három igaz mondatban ellentmondás talál:

1. *Minden ami elmúlt igaz, és szükségszerű.* Ezt nyilván igaznak kell elfogadnunk, hiszen nincs időgépünk amivel tudnánk változtatni a múlton, tehát az szükségszerűen igaz.
2. *Lehetségesből nem tudunk lehetetlenre következtetni.* Ezt is alapigazságnak fogjuk fel, abból, hogy valami lehetséges, nem tudunk logikusan más dolog lehetetlenségét állítani.
3. *Van olyan állítás, ami lehetséges, de nem igaz, és soha nem is lesz igaz.* Ezt is igaznak érezzük, hiszen az, hogy két centivel nagyobb orrom legyen, lehetséges, de nem igaz, és soha nem is lesz igaz.

Tekintsük most a következő esetet. Van egy tiszta papírlapunk. Erre azt mondjuk, hogy lehetséges, hogy ez a papírlap elégjen. Ezután kimegyünk a mosdóba, összetépjük és eláztatjuk. Ekkor az állításunk lehetséges, de nem igaz, és mivel eláztattuk a papírt, soha nem is lesz igaz. Ekkor azonban a papír eláztatása elmúlt, és így az első állítás szerint szükségszerű, hogy a papír soha nem ég el, ami ellentmondás.
Mi ennek a problémának a megoldása? Valamelyik állítást el kell vetnünk. Az első állítást nem szeretnénk elvetni, mert azt nyilvánvaló igazságnak érezzük. A második állítás logikai érv, amit szintén meg szeretnénk tartani. A megoldás az, hogy a harmadik állítást vetjük el olyan módon, hogy a lehetséges fogalmát újradefiniáljuk. Eszerint valami akkor lehetséges, ha vagy igaz, vagy pedig valamikor igaz lesz. Valami szükségszerű, ha igaz, és mindig igaz is lesz. Ezzel a modalitást igazságértékekre vezettük vissza.

Philón azt mondta, hogy lehetséges valami, ha a saját természeténél fogva megengedi, hogy igaz legyen. Róla most nem is ejtünk több szót, visszatérünk rá az előadás végén.

Sztoikus iskola

A sztoikus iskolát **Kitióni Zénón** alapította. A sztoikusok szerint a tudomány a logika, a fizika és az etika összességét jelentette. A logikát tágabb fogalomként értelmezték, ide tartozott például a retorika és a nyelvtan is.

A sztoikusok legtöbb logikában elért eredménye **Khrüszipposz**-hoz köthető. Sokak őt nagyobb logikusnak tartották mint Arisztotelészt.
Akárcsak Arisztotelésznél tettük, vizsgáljuk meg a sztoikusok jelentés és következtetéselméletét.

Jelentéselmélet: A sztoikusok szerint a logikában a kifejező, a kifejezett, és a tárgy egységben áll. A kifejező a beszéd, a tárgy a dolog amiről szó van, a kifejezett pedig az értelem, görög szóval a *lekton.*
A sztoikusok megkülönböztettek befejezett és befejezetlen lektont. Befejezett lekton az az, aminek önmagában kinyilvánítva is van értelme, a befejezetlen pedig ennek az ellentéte. Annak a kijelentésnek, hogy *fut*, önmagában nincsen értelme, de hogy *Szókratész fut* már igen. Axiómának a mondat értelmét nevezték, ez képezte a logika tárgyát. Az a két mondat, hogy *A alacsonyabb mint B* és *B magasabb mint A* másképpen néz ki, de ugyanaz az értelmük, ugyanazt fejezik ki.

Kijelentés és következtetéselmélet: A sztoikus következtetéselmélet Arisztotelésszel szemben összetett kijelentésekkel is foglalkozik. **Teophrasztosz** például aki Arisztotelész után élt a következő következtetéseket állapította meg:

$$A \supset B,\, B \supset C \Rightarrow A \supset C,$$
$$A \supset B,\, {\sim}A \supset C \Rightarrow {\sim}B \supset C,$$

ahol $A{\supset}B$ jelentése: Ha A, akkor B, a $\sim$ pedig a tagadást jelöli.

A sztoikus következtetéselmélet a következő három részből állt:

- Alapvető következtetések,
- Visszavezetési szabályok,
- Levezetett következtetések.

A sztoikus logika öt alapvető következtetést különböztetett meg:

1. $A \supset B,\, A \Rightarrow B,$
2. $A \supset B,\, {\sim}B \Rightarrow {\sim}A,$
3. ${\sim}(A\ \&\ B),\, A \Rightarrow {\sim}B,$
4. $A \vee B,\, A \Rightarrow {\sim}B,$
5. $A \vee B,\, {\sim}A \Rightarrow B.$

Az alapkövetkeztetésekben a $\vee$ a kizáró vagyot, a & pedig az és kötőszót jelöli. Az első alapkövetkezést *modus ponens*-nek, a másodikat *modus tollens*-nek nevezzük. Az egyes következtetésekre példákat is mondhatunk:

1. *Ha esik az eső, nedves az út. Esik az eső.* $\Rightarrow$ *Nedves az út.*
2. *Ha esik az eső, nedves az út. Nem nedves az út.* $\Rightarrow$ *Nem esik az eső.*
3. *Nem lehet egyszerre hideg és meleg. Hideg van.* $\Rightarrow$ *Nincs meleg.*
4. *Vagy délelőtt, vagy délután van. Délelőtt van.* $\Rightarrow$ *Nincs délután.*
5. *Vagy délelőtt, vagy délután van. Nincs délelőtt.* $\Rightarrow$ *Délután van.*

A sztoikus logika négy visszavezetési szabályt állapított meg:

1. $A,\, B \Rightarrow K \rightarrow A,\, {\sim}B \Rightarrow {\sim}K$ (*kontrapozíció*).
2. Ezt a szabályt nem ismerjük.
3. $A, B \Rightarrow K;\, C, D \Rightarrow B \rightarrow A, C, D \Rightarrow K$ (*metszetszabály*).
4. Ezt a szabályt nem ismerjük.

Levezetett következtetésnek számít minden amit az alapvető következtetések és a visszavezetési szabályok segítségével le tudunk vezetni. Ilyen levezetett következtetés sok van, mi ebből két érdekesebbet említünk meg:

1. $A \supset (A \supset B),\, A \Rightarrow B$ (kétszer alkalmazva a modus ponenst),
2. $A \supset B,\, A \supset {\sim}B \Rightarrow {\sim}A$ (*reductio ad absurdum*).

A sztoikus következtetéseméletben mai szemmel nézve több hibát is találhatunk. Az első ilyen, hogy a modus tollens, és az első visszavezetési szabályból levezethető a modus ponens. Ez a takarékosság csak XIX. századi követelény, akkoriban nem számított fontosnak. A másik hiányosság, hogy nincs olyan szabály, amiből összetett dolog következne, a konkúzió mindig rövid. Egy ilyen lehetséges következtetés például, hogy A-ból következik A vagy B. Pozitívum azonban, hogy nagyon alapvető, nulladrendű logika, minden logika alapja.

Gondoljuk meg, mit mondott volna Arisztotelész erre a logika felépítésre. Nyilván azt mondta volna, hogy ez mind jó, de ezeket én is tudtam, csak nem írtam le, és rendszereztem őket. Arisztotelész valóban használ ilyen típusú következtetéseket a műveiben.

Foglaljuk tehát össze, hogy milyen összetétlek voltak használatosak a sztoikus logikafelépítésben, és mi volt rájuk jellemző.

- **nem** ($\sim$): A legegyszerűbb összetételfajta. A tagadást vizsgálva azonban alapvető különbséget találunk Arisztotelész és a sztoikusok logikája között. Míg a sztoikusok az egész mondatot tagadták, megváltoztatva így annak igazságságértékét, Arisztotelész az állítmányt tagadta. Arisztotelész nem is álmodott olyasmiről, mint például az összetett mondat tagadása.
- **és** (&): A logikában nincsen olyan, hogy „részben igaz”, az összetett mondat mindkét felének igaznak kell lennie. A nyelvvel ellentétben az és reláció szimmetrikus. A beszédben azonban nem mindegy, hogy az mondom, hogy *Fejberúgtam és hanyattesett*, vagy azt, hogy *Hanyattesett és fejberúgtam.*
- **vagy** ($\vee$): A vagy kötőszó jelenthet megengedő és kizáró vagyot is, de a jelek arra utalnak, például a negyedik alapkövetkeztetés is, hogy a sztoikusok a kizáró vagyot használták. Ehhez kapcsolódik **Lüszipposz** története, aki azt mondta, hogy az állatoknak is van logikája, amit azzal indokolt, hogy látott egy kutyát, aki egy nyulat kergetett az úttesten, majd amikor egy hármas útkereszteződéshez ért, megszagolt két irányt, majd elindult a harmadik irányba. Ez is a kizáró vagyra utal, hiszen a nyúl csak az egyik irányba menekülhetett.
- **ha-akkor** ($\supset$): Ez a legösszetettebb relációm, négy álláspont is született az értelmezésével kapcsolatban.
  1. $A \supset B \Leftrightarrow \sim(A \ \& \sim B)$,
  2. $A \supset B \Leftrightarrow$ lehetetlen, hogy $(A \ \& \sim B)$,
  3. $A \supset B \Leftrightarrow A$ és $\sim B$ kizáró viszonban vannak,
  4. $A \supset B \Leftrightarrow B$ potenciálisan benne van A-ban.

  Az első értelmezés Philónhoz, a második Diodóroszhoz kapcsolható. A négyféle értelmezést két csoportba oszthatjuk, az első csoportba Philón értelmezése, a második csoportba pedig a másik három értelmezés kerül. Ezt azzal indokolhatjuk, hogy Philón értelmezése a legegyértelműbben, és legvilágosabban írja le a relációt. Megfigyelhetjük, hogy a négy értelmezés ilyen sorrendben egyre erősebb feltételt szab. Míg Philón értelemzése alapján $A \supset B$ teljesülésére már A hamissága is elegséges feltétel, addig a negyedik értelmezés már tartalmazást követel meg.

Sajnálatos tény, hogy a sztoikus iskola eredményeit nem ismerték el az utókorban, és nem próbálták meg egyesíteni Arisztotelész elméletével, mert akkor a modern logika is sokkal magasabb szinvonalon lenne.

5. előadás

2006. október 18.

Középkori logika

A középkor alatt egy kultúrális változást értünk, amelyre ha be szeretnénk határolni, azt mondhatjuk, hogy a keresztény vallás elterjedésétől a kelet-római birodalom bukásáig tartott.

Galenosz (i. sz. 2. század) az orvostudományban jeleskedett. Az ókori görögök úgy gondolták, hogy az egészséget a négy testnedv, a nyál, az epe, a fekete epe és a vér egyensúlya okozza. Ez az egyensúly nem minden emberben ugyanolyan. Akiben a nyál azt flegmatikusnak, akiben az epe azt kolerikusnak, akiben a fekete epe azt melankolikusnak, akiben pedig a vér dominál azt szangvinikusnak nevezték.
Galenosz szerette volna összebékíteni az arisztotelészi és a sztoikus logikát. Ő vezette be a negyedik alakzatot, három premisszás szillogizmusokat is vizsgálva, de munkássága sajnos nem maradt fenn.

Porphüriosz (i. sz. 3. század) Galenosszal szemben már keresztény vallású filozófus volt. Platón tanait értelmezte tovább, mert azt az fért össze a legjobban a kereszténység tanaival. Mivel Platónnak nem volt felépített logikája, így az arisztotelészi logikát, és a platóni filozófiát akarta összeboronálni.
Arisztotelész műveihez írt bevezetőket, de ezek közül csak a Bevezetés a ketegóriákba maradt fenn. Úgy gondolta, hogy öt kategória viszonyát kell meghatározni. Ez az öt kategória a következő:

- *nem*: nem például az, hogy állat,
- *faj*: faj példul az, hogy ember,
- *sajátosság*: az ember sajátossága az az, hogy racionális,
- *járulák*: az ember járuléka például az, hogy két lábú,
- *különbség*: a fajok közötti különbséget vizsgálja.

Ez a felépítés erős hasonlóságot mutat azzal, ahogyan Arisztotelész a tudományos kutatást építette fel. Porphüriosz megmagyarázza ezeket a fogalmakat, leírja a fogalmak közti hasonlóságokat és különségeket.
Mivel Porphüriosz keresztény szerző, művei fennmaradtak. Ennek eredménye, hogy a középkorban azt gondolták, hogy a logika a nemek és a fajok viszonyáról szól.

Boethius (i. sz. 6. század) Arisztotelészt fordít latinra, neki is célja az arisztotelészi és a sztoikus logika összebékítése. Boethiust azonban börtönbe zárják, és kivégzik, és halálával „sötétség borul Európára”, az arabokon kívül senki sem foglalkoznik logikával.

A 8-9. században a térkép megszilárdulásával nagy hangsúly fektetődik az oktatásra, és terjed az írásbeliség. A középpontban a hét szabad művészet állt.
Ez az első három szabad művészetet (grammatika, logika, retorika), összefoglaló néven tríviumnak (triviális) nevezzük. Ez tartalmazza a beszéd, a gondolkodás és a meggyőzés tudományát, amelyet mindenkinek el kell sajátítania.
A további négy szabadművészetet, (aritmetika, geometria, csillagászat, zene) összefoglaló néven quadriviumnak hívjuk. Ez a magasabb tudományokat tartalmazza. A Pythagoreusok szerint ez a négy tudományág alkotta a matematikát. A csillagászat az égbolt geometriája, a zene pedig a hangok aritmetikája.

Vizsgáljuk meg mi állt ezidőben a rendelkezésre a múlt logika témájú művei közül. A régi logikába tartozott Arisztotelész a Kategóriák című műve, és a Hermeneutika egy része, valamit Porphüriosznak a Kategóriákhoz írt bevezetője. Az új logikába tartozott Arisztotelész többi műve, a modern logika pedig a saját ötleteiket tartalmazta.

Anzelmus (1033-1109) nevéhez köthetjük a hit és az ész igazságának éles elválasztását. A hit igazsága alatt a teológiát és a Bibliát, az ész igazsága alatt pedig a filozófiát értette. Úgy gondolta, hogy ha Isten „jól végezte a dolgát”, akkor az eszünkkel ugyanoda kell jussunk mint a hitünkkel, és a hit igazsága az elsőrendű. Ahhoz, hogy ellenőrizzük az ész igazságát, be kell látnunk csak észérvekkel, hogy létezik Isten. Az ilyen bizonyítást *ontológiai istenérv*nek nevezzük, igen népszerűek voltak abban az időben.

Anzelmus ontológiai istenérve vázlatosan a következőképpen néz ki:

- ⇒ Isten az, aminél nagyobb el nem gondolható.
- ⇒ A definíció kimondása által az elménkben megjelent az a valami, aminél nagyobb el nem gondolható.
- ⇒ az elménkben lévő dolognál nagyobb az, ami a valóságban is létezik.
- ⇒ Ha Isten csak az elménkben létezne, akkor elgondolhatnánk egy nagyobbat, ugyanazt az Istent, ami a valóságban is létezik.
- ⇒ Ellentmondásba jutottunk, vagyis létezik a valóságban Isten, aminél nagyobb el nem gondolható.

Descartes ontológiai istenérve ennél sokkal egyszerűbb, lecsupaszított formában a következőképpen néz ki:

- ⇒ Isten az, ami minden jó tulajdonsággal rendelkezik.
- ⇒ A létezés egy jó tulajdonság.
- ⇒ Isten létezik.

Hol van ezekben az érvekben? Descartes gondolatmenete különösen aggasztó, hiszen látszik, hogy ha ezt elfogadnánk, akkor elég sok minden létezését be tudnánk látni, amit azért nem feltétlenül szeretnénk. Azokat az állításokat, hogy Isten minden jó tulajdonsággal rendelkezik, és hogy nála nagyobb el nem gondolható, nem szeretnénk kétségbe vonni.

Immanuel Kant a megoldást abban állapította meg, hogy *a létezés nem tulajdonság*! Azáltal, hogy valami létezik, nem lesz sem több, sem pedig kevesebb. Ha azonban ezt a gondolatot elfogadjuk, annak következménye, hogy pusztán a logika segítségével nem tudunk létezést igazolni.

Aquinoi Szent Tamás öt ontológiai istenérvet is felsorolt. Ezeket nem soroljuk itt fel, érdekességképpen, hogy a jellegüket lássuk, megemlítjük az első érvet:

$\Rightarrow$ Minden ami mozog, azt mozgatják.
$\Rightarrow$ A mozgatók sorozata nem mehet a végtelenségig.
$\Rightarrow$ Van első mozgató.

Pierre Abélard (1079-1142) nevéhez köthetjük az univerzális vitát, vagyis az egyetemes létezővel kapcsolatos vitát. A *realisták* szerint van, a *nominalisták* szerint nincsen egyetemes létező, ennek az irányzatnak volt Abelard az első képviselője.
A realisták azt a kijelentést, hogy *Minden ember halandó* úgy értelmezték, hogy van két általános létező, és az ember benne van a halandóság nevű dologban (*inherenciaelmélet*).
A nominalisták ezzel szemben ebben a mondatban két egyedi létezőt fedeznek fel, amelyek azonosak (*azonosságelmélet*).
Pierre Abélard beleszeretett egy gazdag kereskedő 13 éves lányába, akit feltehetőleg filozófiára tanított. Az apa, hogy eltiltsa a lányát Abélardtól, egy zárdába adta, de Abélard pap lévén elment a zárda gyóntatópapjának. Miután ez is kitudódott, az apa kiheréltette, az egyház pedig kitagadta. Ezután a Abélard a Sorbonne melletti réten hirdette tanait, amelyeket több ezren hallgattak minden alkalommal.

Hogyan fordultak újra az emberek a logika felé? Az arab fordításokból megismerték Arisztotelészt. A fordítóirodákból egyetemek alakultak. Alaposan megismerték a régi gondolatokat, rengeteg iskolát alapítottak, fejlett és változatos elképzeléseket alkottak.
Arisztotelész műveit tanulmányozták. A Kategóriákat és a Hermeneutikát mint régi logikai műveket régóta ismerték. Az I. analitika egy zárt elmélet, nem volt rajta mit kommentálni, a II. analitikát pedig nem értették. A Topika és a Szofisztikus cáfolatokat vizsgálva toposzokkal, érvelési hibákkal, és paradoxonokkal foglalkoztak. Ezek közül a második kettőről nem tudunk sok újat mondani, de a toposz egy igen érdekes fogalom. Úgy definiálhatnánk, hogy a toposz egy általános premissza, amely kiválasztja a használt premisszákat. Hogy világosabb legyen, miről van szó, tekintsük a következő példát:

- **Pr. 1:** Az érzékelés a tudás egyik fajtája.
- **Pr. 2:** Létezik téves tudás.
- **T:** Ami igaz a nemre, az igaz a fajára.
- **K:** Létezik hibás érzékelés.

A toposz tehát a premisszák halmazából kiválaszt kettőt, és a segítségével levonhatjuk a konlúziót.

6. előadás

2006. október 25.

Logika modernorum

13. század:	Petrus Hispanus	$\Rightarrow$	nem azonos a pápával
		$\Rightarrow$	Tractatus
		$\Rightarrow$	legszélesebb körben forgatott mű
	Aquinoi Szent Tamás	$\Rightarrow$	sokat foglalkozott logikával
		$\Rightarrow$	terjedelemes személyiség
		$\Rightarrow$	Arisztotelészt békítette a vallással
14. század eleje:	William Ockham	$\Rightarrow$	nominalista
	Jean Buridan	$\Rightarrow$	nominalista
14. század vége:	Albertus de Saxonia		
	Paulus Venetus	$\Rightarrow$	Logica Magna

Ezek a leglényegesebb két évszázada a modern középkori logikának, a 12. századig nem volt jelentős logikai eredmény, a 15. századtól pedig leginkább csak a szőrszálhasogatás a jellemző.

Kiindulásként Arisztotelész műveit vizsgálták. A Kategóriákkal és a Hermeneutikával nem foglalkoztak. Az I. analitikát betéve tudták, de mivel az egy zárt elmélet, nem tettek hozzá semmit. A II. analitikát azonban nem értették. De mivel a vitákat szerették a középkorban, így a Topika és a Szofisztikus cáfolatok című művek nagyon érdekelték őket. Szerettek paradoxonokkal foglalkozni, és kidolgozták a toposzok elméletét.
A középkorban jelent meg a vitákhoz kapcsolódó *Quaestio-forma*, amely a következőképpen épült fel:

1. probléma/tétel, 2. érvek mellette, 3. érvek ellene,
4. válasz, 5. ellenérvek az ellenérvek ellen.

Rendkívül modern vitakultúrával rendelkeztek, ismerték a vitapartner érveit, és arra reagáltak, a diákok tanulták a vitatkozás tudományát.

Szemantika: Az Arisztotetlész által kidolgozott szemantikát fogadták el mint keretelmélet (nyelv $\rightarrow$ gondolatok $\rightarrow$ valóság).
Ezen elmélet szerint a nyelv egy neutrális nyelv, vannak a fogalmak (*conceptus*) és a mondatok (*proposito*). Ha azt mondom, hogy *fehér* akkor a fejemben olyan valami jelenik meg, ami fehér. Ha azt mondom, hogy a *hó fehér*, *the snow is white* vagy azt, hogy *sneg je belo* akkor ezek ugyanazt jelentik.

Vizsgáljuk meg a realista és a nominalista szemantikát. A realista szerint van egy olyan általános fogalom, hogy *ember*, amely minden emberre utal. A nominalista szerint azonban nincsennek általános létezők, és az *ember* fogalom külön-külön jelöl minden egyes embert. A realista szerint a propositoból következik egy tény, mint például az, hogy *Az Eiffel-torony 300 méter magas.* Ezzel ellentétben a nominalista szerint ebből nem következik tény, hanem a két terminus ugyanarra vonatkozik, és a mondat összekapcsolja ezeket. Vizsgáljuk meg, hogy milyen a két felfogás az általános fogalomról alkotott elképzelése. A realista felfogás általános fogalom elképzelése világos, a nominalistáé azonban több problémát is felvet, ugyanis szerinte az általános fogalomnak három fontos kritériumnak is eleget kell tennie:

- Minden alá tartozó dologra hasonlít,
- Minden alá tartozó dologra ugyanannyira hasonlít,
- Minden alá tartozó dologra jobban hasonlít, mint bármi másra.

A nominalista álláspont a modernebb, és az is áll közelebb a mai állásponthoz. Ez csak egy lecsupaszított szemléltetése a két elmélet közti különbségnek, valójában a különbség sokkal összetettebb.

Terminusok sajátosságai:

Significatio:
- A megértés megjelenése az elmében (ha valaki azt mondja, hogy *Görög Zita*, akkor az elmében megjelenik valami Görög Zitával kapcsolatosk,
- Mindig van,
- A beszéd minden részének van,
- A kontextustól független.

Suppositio:
- Valami helyett áll,
- Nem mindig van,
- A beszéd nem minden részének van,
  - ⇒ kategorematikus terminus (lehet alany és állítámány)
  - ⇒ szünkategorematikus terminus (nem lehet sem alany, sem állítmány, például a kötőszavak)
- A kontextustól nem független.

A suppositokat osztályozták is:

supposito	⇒	nem saját						
	⇒	saját	⇒	materiális				
			⇒	formális	⇒	egyszerű		
					⇒	személyes	⇒	határozott
							⇒	zavaros

Az egyes típusokra a jobb megértés érdekében példákat is adhatunk:

nem saját: *A filozófus*, materiális: *Az ember főnév*, egyszerű: *Az ember faj*,
határozott: *Az ember halandó*, zavaros: *Néhány ember filozófus.*

Kijelentéselmélet: A realista kijelentéselmélet jóval egyszerűbb mint a nominalista. Tekintsük a következő két már jól ismert kijelentéseket:

Szókratész ember: A realista erre azt mondaná röviden, hogy $E(Sz)$, vagyis hogy az általános létező (az ember) vonatkozik Szokratészre is. A nominalista álláspont szerint azonban nincsen általános létező, tehát ez a kijelentés vagy azt jelenti, hogy $sz = e_1$, vagy azt, hogy $sz = e_2$, ...

Minden ember halandó: Ha képlettel akarjuk leírni akkor erre a realista azt mondaná, hogy $\forall x(E(x) \supset H(x))$. A nominalista szemlélet itt már jóval bonyolultabb, hiszen ez a kijelentés azt jelenti, hogy vagy $e_1 = h_1$, vagy $e_1 = h_2$, ... és vagy $e_2 = h_1$, vagy $e_2 = h_2$, ... (végtelen diszjunkciók végtelen konjunkciója).

A realista kijelentéselméletre mondjuk azt, hogy inherenciaelmélet, míg a nominalistára azt, hogy azonosságelmélet.

Konnotáció: egy terminus másra is vonatkozik, mint amit elsődlegesen szignifikál:

- *Negatív terminusok*: a vakság konnotálja a látást, a sötötség a világosságot, a rossz a jót, ugyanis ezek a fogalmak nem önálló létezők, a sötétség nem létezik önmagában, az a világosság hiánya.
- *Relatív terminusok*: a nagy és a kicsi, valamint az apa és a gyerek egymást konnotálják, ezek sem léteznek önmagukban.
- *Paronímiák*: amikor a szótő azonos, például a bátor konnotálja a bátorságot.

Ampliáció: a suppositio kiszélesítése:

- a lehetséges és a szüksészerű szavak az igazhoz képest vannak appiálva,
- a múlt és a jövő szavak a jelenhez képest vannak appiálva.

Ezen kívül van még a *kopuláció* és az *apelláció* amit nem részletezünk.

Konszekvenciaelmélet: A kijelentéseket a következőképpen osztályozhatjuk:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{kijelentés} & \Rightarrow & \text{kategorikus (egyszerű)} & \Rightarrow & \underline{\underline{o}}, \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{e}}, \underline{\underline{i}} \\
 & & & \Rightarrow & \text{egyedi} \\
 & & & \Rightarrow & \text{létezési } (A\ est) \\
 & \Rightarrow & \text{hipotetikus, (bonyolult)} & \Rightarrow & \& \\
 & & & \Rightarrow & \vee \\
 & & & \Rightarrow & \supset
\end{array}
$$

Kétféle következtetést különböztettek meg:

- *formális*: minden terminussal fennáll, vagyis a kategorematikus szavak kicserélhetőek, a szünkategorematikus szavak adják a következtetés formáját,
- *materiális*: értelemfüggő következtetések, nem áll fenn minden terminussal.

7. előadás

2006. november 8.

15. század végére a logika kimerült, inkább szőrszálhasogatás volt. A logikai elméletek túl bonyolulttá váltak ahhoz, hogy csak úgy hozzá lehessen tenni, ha valaki behatóan akart logikával foglalkozni, akkor annak legalább egy-két évtizedet kellett erre rááldoznia az életéből, hogy megismerje a referens elméleteket, és még így sem számíthatott széles olvasóközönségre.
A 16. századi reneszánsz kultúra sem kedvezett a logika fejlődésének, hiszen a logikát elavult középkori dolognak tekintették, amellyel nem kell foglalkozni.
A 17. században a tudományos forradalom keretében sok tudomány éledt újjá, de ezek között sem igazán szerepelt a logika, mert az nem tekintették tudománynak, attól senki sem lett kisebb vagy nagyobb tudós, hogy logikával foglalkozott. Mégis ebben az évszázadban élt és alkotott **Leibniz**, akinek köszönhető, hogy a logika a következő évszázadokban újra fontossá vált. Tekintsük át néhány ezen korbeli filozófus álláspontját a logikával kapcsolatban.

Francois Bacon híres logikai műve a *Novum organum* (1620) volt. A mű címe új eszközt jelent, amely Arisztoteleészre utal vissza. Az ő logikáját el kell vetni, és helyette a világot kell megfigyelni, táblázatokat kell készíteni, és ha elég ilyen táblázat gyűlt össze, akkor le kell vonni az általános következtetéseket. Olyan egyedi állításokat figyelünk meg, hogy *Szókratész halandó*, *Arisztotelész halandó* és *Platón halandó*, és elég sok ilyen típusú megfigyelés után levonhatjuk a következtetést, hogy minden ember halandó. Ezt a következtetéstípust hívjuk *indukciónak.* Egy másik következtetésfajta a *dedukció*, amikor általános állításból következtetünk egyediekre: *Minden ember halandó*, *Bill Gates ember*, következésképpen *Bill Gates halandó.*
A dedukció előnye, hogy a következtetés teljesen biztos, ha a premisszák igazak, de hátránya, hogy általános állítások igazságát nem tudjuk belátni, mi csak egyedi igazságokat tudunk feljegyezni, és ebből kell levonnunk a következtetéseinket. Ezért gondolta azt Bacon, hogy Arisztotelész logikáját el kell vetni.

René Descartes leghíresebb műve az *Értekezés a módszerről* (1637) volt. Descartes műveit olvasva azt tapasztalhatjuk, hogy a bizonyításai távol álltak attól, amit a mai értelemben elvárunk egy bizonyítástól. Csak a felfedezésre törekedett.

Arnauld és **Nicole** műve a *Port Royal logika* (1662) volt. Az fogalom/kijelentés/ítélet hármas mellett a mű leghosszabb része a módszer tana, amelyet nem is igazán neveznénk logikának.

G. W. Leibniz (1646-1716) a kor egyik legnagyobb, legszerteágazóbb tudósa volt, sokat írt, és részletesen foglalkozott logikával. Hamar befejezte az egyetemet, és ledoktorált. Párizsba utazott, ott zárkózott fel a tudományos világ éléhez.

Newtonnal párhuzamosan kidolgozta az integrál és differenciálszámítás elméletét, amelynek köszönhetően sok prioritási per szakadt a nyakába. Hozzá köthető a kettes számrendszer használata, továbbfejlesztette *Pascal* számológépét, és ezen munkájának köszönhetően a Royal Society a tagjává választotta. Miután hazament sok akadémiát alapított. Felismeri, hogy a természetes nyelv nem alkalmas a tudományok műveléséhez, kell egy mesterséges nyelv a matematika mintájára, ami a logika lenne.

Leibniz logikája

A Leibniz által megfogalmazott logika dolgok és tulajdonságok együttese, ahol a dolgok tulajdonságok összessége. Ha például $a_1, a_2, \ldots$-vel jelöljük a dolgokat, $T_1, T_2, \ldots$-vel a tulajdonságokat, akkor az $a_6 = T_6 + T_{28} + T_{29} + \ldots$ egyenlet jelentheti azt, hogy a kréta (a_6) fehér (T_6), hosszúkás (T_{28}), szilárd (T_{29}), ...

A Leibniz-elv két dolgot mondd ki. Az első az az, hogy a megkülönböztethetetlen dolgok azonosak, vagyis ha minden T tulajdonságra $T(a) \leftrightarrow T(b)$, akkor $a = b$. Ez azt jelenti, hogy a térbeli és időbeli elhelyezkedés is tulajdonság, mert attól még, hogy *Kutrovátz Gábor* az egyik pillanatban áll, a másikban pedig ül, még ugyanaz a személy, mert a tulajdonság valójában az, hogy *Kutrovátz Gábor ebben az időben és ezen a helyen ül.*
A másik fele az elvnek azt mondja ki, hogy az azonos dolgok megkülönböztethetetlenek, vagyis, ha $a = b$, akkor $T(a) = T(b)$ minden tulajdonságra. Ebből adódik, hogy az azonos dolgok kicserélhetőek, vagyis a *Bill Gates szemüveges*, *A Microsoft tulajdonosa szemüveges* mondatok ugyanazt jelentik.

Vizsgáljuk meg, hogy ez az elv hogy viszonyul a relációkhoz, vagyis az olyan típusú állításokhoz, hogy *Párisz szereti Helénát.* Ez két dolgot is jelent. Az első az az, hogy a Párisz nevű dolog rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy szereti Helénát, valamint azt is, hogy a Heléna nevű dolog szeretve van Párisz által. A tulajdonságokban tehát benne van az egész világegyetem.

Fogalmak: Leibniz logikájának felépítése három fajta fogalmat különböztet meg. Az első az egyszerű (T_n), a második az összetett ($T_i + T_j + T_k$), a harmadik pedig a teljes fogalom (egy tulajdonságösszesség, egy dolog).
Belső ellentmondásnak nevezzük az olyat, amikor azt mondjuk, hogy valami kerek és szögletes, mert az nem teljesülhet egyszerre. *Külső ellentmondásról* beszélünk akkor ha a relációk és a tulajdonságok nincsennek megfelelően összehangolva.
Komposszibilis egy fogalom, ha együtt lehetséges. A komposszibilitás ekvivalenciareláció. A refelexivitás és a szimmetria nyilvánvaló, a tranzitivitást pedig elhisszük. Egy *lehetséges világ*nak nevezzük a komposszibilis fogalmak egy ekvivalenciaosztályát.

Kijelentés: Egy kijelentés az, hogy *Az ember halandó.* Ezt azt jelenti, hogy ha az ember $T_1 + T_3 + T_7 + T_9 + \ldots$ a halandó pedig $T_7 + T_9 + \ldots$, vagyis az „állítmány” benne van a fogalomban.

Észigazságnak nevezzük az olyan állítást, ahol két összetett (általános) fogalom szerepel, ennek az igazságát ugyanis gondolkodással be tudjuk látni, hiszen ismerjük hogy a fogalmak mely véges sok tulajdonságok összegeként állnak elő, csak ellenőrizni kell a megfelelő tartalmazást.
Tényigazságnak nevezzük az olyan állítást, ahol egy teljes (konkrét) és egy összetett fogalom szerepel. Ilyen például az, hogy *Stohl András most éppen fogat most.* Ennek az igazságát csak akkor tudnánk megállapítani, ha valaki látná ebben a pillanatban Stohl Andrást. Szerencsére azonban Istennek módjában áll a Stohl Andárásnak megfelelő végtelen tulajdonságláncot áttekinteni, és ellenőrizni, hogy valóban fogat mos-e.

A lehetséges világok tehát csak tényekben térnek el. Szükségszerűnek nevezünk egy olyan tulajdonságot, amely minden lehetséges világban igaz. Lehetségesnek pedig akkor nevezünk egy tulajdonságot, ha van olyan lehetséges világ, amelyben igaz.

Következtetéselmélet: Kövessük lépésről lépésre, hogyan próbált Leibniz kidolgozni egy következtetéselméletet ehhez a fogalom és kijelentéselméletet.
Logika című művében (1669) minden tulajdonságnak megfeleltet egy prímszámot (most eltekintünk attól, hogy azok a kontinuum sok tulajdonsággal ellentétben csak véges sokan vannak) és így ha $A = T_7 + T_9 + T_{50}$, $B = T_9 + T_{50}$, akkor ezekhez a dolgokhoz definiálja az α és a β változókat az $\alpha = p_7 p_9 p_{50}$, $\beta = p_9 p_{50}$ képletekkel. Ekkor az *A est B* kijelentés az egyértelmű felbonthatóság és a prímtulajdonság miatt valójában azt jelenti, hogy $\beta|\alpha$. Ez azt jelenti, hogy ha gyakorlatban nem is kivitelezhető, de van egy univerzális kiszámológép, amely minden kijelentésről el tudja dönteni, hogy igaz-e. Ez az elmélet így azonban nem tudja vizsgálni a szillogizmusokat, így egy időre félre teszi ezt.

1679-ben Leibniz újra elővészi a témát, és a dolgokat úgy írja fel, hogy külön veszi azokat a tulajdonságokat amikkel rendelkezik, és azokat amikkel nem. Így A-nak lesz két rá jellemző „száma” α_+ és α_-. Ekkor *A est B* két oszthatóságot jelent, mégpedig azt, hogy $\beta_+|\alpha_+$ $\alpha_-|\beta_-$. Ez a modell már tudja kezelni a szillogizmusokat, de nem tud mit kezdeni az $A\&A = A$ típusú kijelentésekkel.

1690-ben már műveleteket is bevezet, a *konjunkciót* ($\oplus$) és az *azonossáot* (∞). Olyan kalkulusokat ír le, mint például az, hogy $A \oplus Y \infty C$-ből következik, hogy *C est A*. Bár nem jut benne messzire, de ez egy forradalmi gondolat, melyben a műveletek tulajdonságai a kalkulusokból jönnek ki.

8. előadás

2006. november 15.

Immanuel Kant (1724-1804) hatását tekintve Arisztotelészt és Platónt leszámítva minden idők talán legnagyobb hatású filozófusa. Mivel német származású szerző, így ő az angolokkal szemben nem szégyell logikával foglalkozni, akik Lockét követve úgy gondolták, hogy a logika értelmetlen szótépés. Hozzá kapcsoltuk az ontológiai istenérveknek azt a megoldását, amely abban látja a hibát, hogy a létezés nem tulajdonság.

Kant leghíresebb műve a *Tiszta ész kritikája* (1781). Kant a logikára úgy tekintett, hogy az leírja minden gondolkodás formális szabályait, az értelem önmagával foglalkozik. Felfogása szerint egy tudomány akkor jó, ha sosem hátrál, és biztosan halad előre. Mivel még soha egyetlen logikai elméletet sem cáfoltak meg, így a logika is jó tudomány. Kant a matematikát és a fizikát is jónak tartotta, amelyet már Descartesék, illetve Newtonék lezártak, és így megvannak határozva a keretei amin belül lehet mozogni, biztosan haladhatunk előre.

Kant kétféleképpen is osztályozza az állítások fajtáit:

- **a priori**: olyan állítás, ami megelőzi a tapasztalatot, például: *Minden test kiterjedt.* Az állítás igazságához nem szükséges a tapasztalat, hiszen a testbe már beleértjük azt, hogy kiterjedt.
- **a posteriori**: olyan állítás, ami a tapasztalatból származik, például: *Minden test nehéz.* Ezt tapasztalatból tudjuk, elképzelhető lenne olyan test is, amire nem hat a gravitáció, és így nem nehéz.

- **analitikus**: olyan állítás, amikor az alanyhoz nem tesz hozzá semmit az állítmány, például: *Minden agglegény nőtlen.*
- **szintetikus**: olyan állítás, amikor az alanyhoz hozzátesz valamit az állítmány, például: *Minden agglegény szereti a csokit.*

Mai fejjel azt mondanánk, hogy analitikus egy állítás, ha pusztán a logika szabályai miatt igaz, és szintetikus ha nem. Ez az osztályozás hasonlóságot mutat a már korábban látott tény és észigazság felosztással.
A kétféle osztályozás összefügg egymással. A definícióból következik, hogy minden analitkus állítás a priori, és minden a posteriori állítás szintetikus. Kant egyik kérdése az volt, hogy van-e olyan állítás, ami a priori és szintetikus. Erre ő azt a választ adta, hogy van, és ilyenek a matematikai állítások, például az, hogy *Kettő meg kettő az négy.* Kant szerint ez az álliáts szintetikus, de a mai matematikai felépítést tekintve, ismerve a Peano illetve a Zermelo féle axiomatikát ezt már nem mondhatjuk.

Kant szerint a megismerést az az értelem és a szemlélet együtt alkotják. Az értelem törvényeit a logika, míg a szemlélet törvényeit a matematika írja le. Két fajta szemlélet van, a tér és az idő, az elsőnek a geometria, a másodiknak aritmetika felel meg. Kant logikájában is vannak kategóriák, méghozzá a következő felosztásban:

1.	mennyiség	$\Rightarrow$	általános (minden)	2.	minőség	$\Rightarrow$	állító
		$\Rightarrow$	egyedi (Szókratész)			$\Rightarrow$	tagadó
		$\Rightarrow$	különös (létezik)			$\Rightarrow$	végtelen
3.	viszony	$\Rightarrow$	kategorikus (A *est* B)	4.	mód	$\Rightarrow$	szükségszerű
		$\Rightarrow$	hipotetikus (ha, akkor)			$\Rightarrow$	lehetséges
		$\Rightarrow$	diszjunktív (vagy)			$\Rightarrow$	nincs modalitás

Ez a felépítés sokkal szigorúbb, nem olyan heurisztikus, mint Arisztotelész kategóriaelmélete, minden állítás a négy csoportból pontosan egy alcsoportba sorolható.

J. S. Mill (1806-1873) leghíresebb műve a *A logika rendszere* (1848), melynek csak egyetlen magyar kiadása van. Mill úgy gondolta, hogy a logika a megismerés tudánya. Empirista filozófus lévén eleve úgy gondolta, hogy a priori kijeletés nem létezik, és indukció segítségével kell egyedi kijelentésekből újabb kijelentéseket létrehozni, és a logika tehát indukcióval foglalkozik. Úgy vélte, hogy egyediből egyedire következtetünk, az általánosítás, az már csak heurisztika. Mill rádöbbent arra, hogy empirikus úton nem tudunk okságot állítani. Csak azért, mert azt tapasztaljuk, hogy egy billiárdgolyó gurul, majd megáll, és egy másik golyó elindul, még nem következtethetünk arra, hogy a második golyó az ütközés következtében kezdett el gurulni. Mill az ok meghatározására öt módszert dolgozott ki, ezeket nem ismertetjük részetesen csak közülük egyet, a megegyezés módszerét mutatjuk be példa gyanánt. Ha azt tapasztaljuk, hogy a rum vízzel, szódával és szörppel keverve is fejfájást okoz, akkor megállapítjuk, hogy a közös következmény a fejfájás, és megkeressük a közös előzményt, amely jelen esetben a rum, és arra a megállapításra jutunk, hogy a rum fejfájást okoz.

Mill után fejlődött ki a **pszichologizmus** irányzata. A pszichologisták azt vallották, hogy gondolkodás esetleges, és így a logika is változik. A kisérleti pszichológusok ezt méréssel vizsgálták, és a nagy siker miatt mindenhol pszichológusokat alkalmaztak, őket alkalmazták a filozófiai tanszékeken. Később azonban különváltak, és a logikával a filozófusok foglalkoztak.

George Boole (1815-1864) logikája már igen közel áll a mai szemlélethez. Felfogása szerint a logika az emberi gondolkodás elveit tartalmazza, ami logikailag vizsgálható. Tárgya az osztályok viszonya. Két legfőbb műve a *Logika matematikai elemzése* (1847) és a *Gondolkodás törvényei* (1854). Boole háromféle kalkulust különböztetett meg:

Osztálykalkulus: Ebben az elméletben az x, y, z szimbólumok osztályok, az 1 az univerzális osztály, a 0 az üres osztály. Az osztályokon értelmezve van a következő három művelet:

xy: x és y közös elemei,
$x + y$: x-nek, vagy y-nak eleme,
$x - y$: x-nek eleme de y-nak nem.

A műveletekre a következő axiómák vonatkoznak:

$$xy = yx,\ x + y = y + x,\ x(y + z) = xy + xz,\ x(y - z) = xy - xz,$$
$$\text{ha } x = y, \text{ akkor } xz = yz,\ x + z = y + z,\ x - z = y - z.$$

A műveleti szabályok a következők:

$$1 \cdot x = x,\ 0 \cdot x = 0,\ x \cdot x = x,$$
$$1 + x = 1,\ 0 + x = x,\ x + x = x.$$

Ezekből további azonosságok is levezethetőek, ilyen például az $x(1 - x) = 0$. Ezen műveletek segítségével a szillogizmusokat is leírhatjuk:

$$\begin{array}{ccc} x(1-y) = 0 & \Rightarrow & \underline{\underline{a}}, \\ xy \neq 0 & \Rightarrow & \underline{\underline{i}}, \\ xy = 0 & \Rightarrow & \underline{\underline{e}}, \\ x(1-y) \neq 0 & \Rightarrow & \underline{\underline{o}}. \end{array}$$

Kijelentéskalkulus: Ebben az elméletben az x, y, z szimbólumok kijelentések, az 1 az igaz, a 0 a hamis. $1 - x$ jelenti azt, hogy nem x, xy jelenti azt, hogy x és y $x + y$ pedig azt, hogy x vagy y. Ebben az esetben $x(1 - y) = 0$ azt jelenti, hogy ha x akkor y.

Valószínűségkalkulus: Boole ezt az elméletet a második könyvében írta le, nem részletezzük, ebben az elméletben az x, y, z szimbólumok események, az 1 a biztos, a 0 a lehetetlen esemény.

9. előadás

2006. november 22.

Gottlob Frege (1848-1925) tekinthető a modern logika atyjának. Frege jelentéktelen jénai matematikus volt, akit nem szerettek a kollegái nem kedvelték, így nem jutott professzori kinevezéshez, egész életében docens maradt. Ennek következtében nem lehettek például doktorandusz növendékei, és az óráira sem igen jártak. Életét végigkisérték az önmaga által generált prioritási viták, többek között Peanoval is. A logikában azonban olyan újszerű dolgokat alkotott, amit a kortársai nem értettek meg.

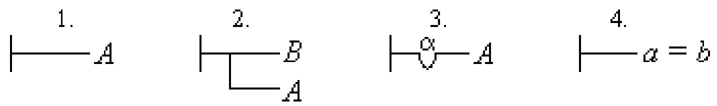
Frége első műve a *Fogalomírás* (1879) volt. Jelképzesen ezt a dátumot számítjuk a modern logika kezdetének. A mű rövid, 88 oldal terjedelmű, szinte előzmények nélkül jelent meg. Célja az aritmetika logikai leírása volt, ugyanis abban az időszakban a matematika hatalmas fejlődésen ment át, nagyon szerteágazóvá vállt, és biztos alapok kellettek. **Cauchy** és **Weierstrass** nyomán megjelent a szigorú bizonyítás igénye. Mivel mindent az aritmetikára vezettek vissza, így a matematika ezen ágát a logikával kellett biztos alapokra helyezni. Később a matematikát halmazelméleti úton alapozták meg, de Frege ezzel nem értett egyet, és elvetette ezt az ötletet. Mivel a művét igen kis példányszámban olvasták, így a kiadója olyan mű megjelenését látta jobbnak, amelyben filozófiailag írja le a logikát, nem pedig formálisan.
Ennek hatására a következő műve *Aritmetika alapjai* (1884) volt amely már formalitásoktól mentes. A nyolcvanas évek végén kiadott több kisebb művet, ilyen például a *Függvény és fogalom* valamint a *Jelölés és jelölet* című munkái.
További két nagyobb szabású műve *Aritmetika alaptételei I.* (1893) és *Az aritmetika alaptételei II.* (1903) volt. Ez utóbbi művét több fiatal matematikusnak is elküldte. **Russel** behatóbban megvizsgálta, és talált benne egy olyan logikai hibát, amely az egész mű alapjaira kihatott. Frége ugyan azt írta a, hogy az ellentmondás feloldása egyszerű, és van is rá ötlete, hogy hogyan lehet ezt a problámát áthidalni, de egész hátralevő életében ezen hiba kiküszöbölésén fáradozott, eredmény nélkül. Ennek köszönhetően idős korára meg is bolondult.

A **Fogalomírás** című művében a tiszta gondolkodás formanyelvét írja le az aritmetika elve szerint. Frége szerint el kell különíteni egymástól a felfedezést és az igazolást. A XX. században a felfedezés már nem számított, senkit sem érdekelt, hogy egy matematikai tételre hogy jött rá az ember, hanem csak az, ahogyan igazolta.
Az igazolásnak kétféle útja van Frége szerint, az egyik a pusztán logikai alapú, a másik pedig a tapasztalati úton történő igazolás. Tapasztalat útján bizonyítjuk be, például Newton erőtörvényeit, de ezekből az ütközési törvényeket már pusztán logikailag is be tudjuk látni.
Frége Kanttal ellentétben a geometriát gyanús tudománynak tartotta, úgy gondolta, hogy a geometria az a tér szemlélete, és mivel a tér Euklidészi, így például Bolyai nemeuklidészi geometriáját nem fogadta el. Puszta játéknak tekintette, ami a valóságban nem létezik.

A formális logikai nyelv igényét az is csak erősítette, hogy Euklidész Elemek című művében találtak hibás bizonyításokat, és kihagyott axiómákat is.
Hogyan bontsunk fel egy nyelvi kifejezést? Frége azt mondta, hogy vessük el az eddigi 2000 évig uralkodó alany-állítmány típusú felbontást, és térjünk át a függvény-argumentum felbontásra. Ő volt az első, aki a függvény fogalmát továbbfejlesztette.

Az argumentum egy zárt kifejezés, amely helyettesíthető, míg a függvény egy nyitott kifejezés amely változatlan. Ha vesszük például a *Kettő a négyzeten* mondatot, akkor ott a kettő az argumentum, a négyzeten pedig a függvény, mert önmagában az, hogy négyzeten nem értelmes. Vegyünk egy másik példát: *A szénsavgáz nehezebb mint a hidrogéngáz.* Ebben a szénsav és hidrogéngáz kifejezéseket szabadon cserélgethetem. Vizsgáljuk meg ezt a mondatot a függvény-argumentum felbontás szempontjából. Mondhatjuk azt, hogy a függvény az, hogy a szénsavgáz nehezebb, az argumentum pedig a hidrogéngáz. Mondhatjuk azonban azt is, hogy az az argumentum, hogy szénsavgáz, a függvény pedig hogy nehezebb mint a hidrogéngáz. Ez látszólag ellentmondás, de tovább boncolva a mondatot, mindkét esetben oda jutunk, hogy a szénsavgáz és a hidrogéngáz is egy-egy argumentum, a nehezebb pedig egy kétargumentumú függvény. Frége forradalmi gondolata az, hogy akárhogyan is végezzük a bontást, mindig ugyanoda jutunk.

Frége a függvényeket két csoportba osztotta. Vannak olyan függvények, amelyek nem pusztán logikaiak, az igazságértéket a gondolkodás határozza meg. Ilyen például az a mondatot, hogy *Arisztotelész egy béka.* Csak logikai úton nem tudjuk eldönteni, hogy ez az állítás igaz-e. A logikai függvények értéke nem függ a tapasztalattól.
Frége a többféle jelölést is bevezetett. A-val jelölt egy kijelentést, $-$ a tartalom, $\vdash$ pedig az ítéletjel. Az első jellel az A kijelentés tartalmát vesszük figyelembe, a második jel pedig az fejezi ki, hogy állítjuk A-t. Frége négyféle logikai függvényt különböztetett meg, amelyekre jelöléseket is bevezetett:



Az első függvény a negáció (tagadás), azt jelenti, hogy nem A. A második a kondicionális (ha-akkor) függvény, az ábra azt jelenti, hogy *ha* A *akkor* B. A harmadik függvény az unverzális kvantifikáció, *minden* α*-ra* A. A negyedik függvény pedig az azonosság, a *azonos* b*-vel.*

Ennek az ábrázolásnak az az előnye, hogy ugyan nehéz megszokni, de két dimenzióban sokkal gyorsabban átlátja az ember a mondat szerkezetét. Hátra ugyanez, nehéz megszokni, és tipográfiailag is nehéz ábrázolni, így továbbra is az eddig megszokott jelöléseinket fogjuk használni.

Logikai axiómák:

1. $A \supset (B \supset A)$,
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$,

3. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$,
4. $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$,
5. $A \supset \sim\sim A$,
6. $\sim\sim A \supset A$,
7. $(a = b) \supset (F(a) \supset F(b))$,
8. $a = a$,
9. $\forall x\ F(x) \supset F(a)$.

Ezeket az axiómákat négy csoportba oszthatjuk. Az első három axióma vonatkozik a ha-akkor függvényre, a második három a tagadásra, a következő kettő az azonosságra, míg az utolsó az univerzális kvantifikációra. Ez az axiómarendszer nagyon fejlett, nár vannak benne hiányosságok. A harmadik axióma levezethető az első kettőből, mondjuk ezt Frége is tudta, csak akkoriban nem volt szempont, hogy egy axiómarendszer redundáns legyen. Az ötödik és a hatodik axióma közül elég az egyik, sőt a negációra vonatkozó három axióma helyettesíthető egyetlen axiómával, azzal, hogy $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$, de ezt Frége nem tudta. Az azonosságra vonatkozó axiómákat a mai napig is ebben a formában használjuk, de az utolsó csoporthoz ma még hozzáadnak két axiómát, hogy teljes legyen. Frége egyetlen levezetési szabályt határozott meg, mert annak a segítségével az axiómákból minden levezethető. Ez a szabály a már korábban említett *modus ponens*, amelyet $\begin{bmatrix} A \supset B \\ \frac{A}{B} \end{bmatrix}$-vel jelölünk.

Frege **Az aritmetika alapjaiban** filozófiai úton formalizmusok nélkül építi fel a logikát. A mű egyik kérdése például az, hogy mi a szám. Frége szerint a szám olyasvalami ami nem tapasztalható, nem szubjektív, nem fizikai és nem is a dolgoknak a tulajdonsága. Ez utóbbira több példát is adott. Amikor azt mondjuk, hogy öt ujjam van, akkor ez egy igaz állítás, de egyik ujjam sem öt, egy sem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Hasonló ellentmondásra vezetne az is, hogy ugyanarra az öt fára azt is mondhatjuk, hogy öt fa, meg azt is, hogy egy facsoport, ugyanis egy dolog nem lehet egyszerre egy is meg öt is. Frége szerint a szám a fogalmak tulajdonsága. A szám fogalom előtt a számosság fogalmát definiáljuk. Akkor mondja két fogalomra hogy a számosságuk ugyanaz, ha van köztük kölcsönöseb egyértelmű megfeleltetés. Ennek alapján nem kell tudni számolni ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy két fogalom azonos számosságú-e. Erre példa a juhait kavicsokkal számoló juhász. Ha már van számosságfogalmunk, akkor a szám fogalmát úgy definiáljuk, mint azonos számosságú fogalmak összessége. Például összegyüjtjük az összes fogalmat, aminek hét a számossága (napok száma, vezérek, törpék, sárkány fejei) és ha ez megvan, akkor megvan a hetes szám fogalma.

Frége a természetes számokat rekurzívan definiálta. Először definiálta a nullát, úgy mint "$x \neq x$" számossága, majd a rákövetkezést úgy határozta meg, hogy ha x-re nem érvényes az F tulajdonság, akkor "$F(a)$, vagy $a = x$" számossága az F-nél egyel nagyobb számosság. Ennek alapján az 1 az "$x \neq x$, vagy $x = 0$" számossága, a kettő pedig "$x \neq x$, vagy $x = 0$, vagy $x = 1$" számossága, és így tovább.

10. előadás

2006. november 29.

Frége számosságfogalma azonban ellentmondást rejtett, és erre Russel fel is hívta a figyelmét. Frége szerint egy fogalom számossága a fogalommal azonos számosságú fogalmak terjedelme.
Egy elemű osztályból azonban sok van, nem lehet őket felsorolni. Russel azt mondta, hogy vegyük azon halmazok halmazát, amelyek önmaguknak nem elemei. Ez a Russel féle halmaz részhalmaza kell legyen az individiumok halmazának, vagyis az 1 már önmagában ellentmondásos.

Ezt a paradoxont többféleképpen is ki lehet küszöbölni. Ilyen lehetőségeket alkotott meg például *Neumann* vagy *Zermelo* és *Frenkel*, amelyek halmazelméletet használnak, de a naiv halmazelmélet nem megfelelő, axiomatikus megalapozás kell. Ez az alapozás a matematikusok számára kiváló, de Frége tiszta logikai alapokat akart, a Zermelo-Frenkel axiómarendszerben a például kiválasztási axióma nem logikai.
Russel és Whitehead megpróbálta tiszta logikával felépíteni az egész matematikát, a harmadik kötetig eljutottak, de ez olyan hosszadalmas munka lett volna, hogy megunták. Az $1 + 1 = 2$ állítást például csak a 217. oldalon tudták bizonyítani. Úgy próbálták meg feloldani a paradoxont, hogy megkövetelték, hogy ne legyen olyan, hogy „halmaz halmaza". Ez azonban már nem tiszta logikai követelmény, így belátták, hogy a puszta logikával nem építhető fel a matematika.

Frége *Jelentés és jelölet* című művében ezt a problémát akarta kiküszöbölni. Frége ebben a műben a neveknek a dologra vonatkozó hatását vizsgálta. Az, hogy $a = a$ az nyilvánvaló, de kérdés, hogy hogyan lehet $a = b$, mint ahogyan például az esthajnalcsillag azonos az alkonycsillaggal. Ez úgy lehetséges, hogy van még egy szint, a névnek van egy jelentése, és ez alapján vonatkozik ugyanarra a dologra:

$$\begin{tikzcd} \text{jel} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{jelölet} \\ & \text{jelentés} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ez a Frége-i háromszög, amit Frége ugyan sosem rajzolt le. Ez a felfogás ellentétben áll Arisztotelész felfogásával, ugyanis eszerint a jel közvetlenül is hat a jelöletre.
Nézzük meg, hogy mik lehetnek a jelek, és ettől függően hogyan néz ki a Frége-i háromszög:

$$\begin{tikzcd} \text{név} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{objektum} \\ & \text{„szabály"} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A név lehet például *Osama bin Laden*, a szabály pedig az, ami alapján megtaláljuk az adott objektumot, például *az a szakállas ember, aki robbantgat.* Egy másik lehetséges jel a mondat:

$$\begin{tikzcd} \text{mondat} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{igazságérték [0,1]} \\ & \text{„gondolat”} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Egy mondat jelölete a mondat igazságértéke. A gondolat a mondat jelentése, ami a fejemben van (ez alapján Frége platonistának tekinthető, hiszen szerinte is léteznek gondolati dolgok). Ha a mondatban kicseréljük a nevet, egy másikra, amelyik ugyanarra az objektumra vonatkozik, akkor a mondat igazságértéke nem változik. Így például *Nyolc nagyobb mint hét*, *A bolygók száma nagyobb mint hét*, *Hófehérke a törpökkel együtt többen vannak mint hét.* Érdekesség, hogy igaz és hamis mondatból ugyanannyi van, hiszen van köztük bijekció (minden mondat párba állítható a tagadásával).
Frége logikájában a tulajdonság egy egy argumentumú függvény. A bemenet egy név, a kimenet pedig egy mondat:

$$\begin{tikzcd} \text{tulajdonság} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{halmaz} \\ & \text{„szabály”} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A tulajdonság jelölete egy halmaz ,az összes olyan dolog, amire teljesül a tulajdonság. Ilyen tulajdonság például az, hogy *fehér*. Egy jól definiált nyelvben egyértelműen eldönthető minden dologról az, hogy teljesül-e rá az adott tulajdonság, jelen esetben az, hogy fehér-e.
A reláció egy két argumentumú függvény, amelynek a bemenete két név, kimenete pedig egy mondat. Az előző ábrához hasonlóan itt is felrajzolhatjuk a Frége-i háromszöget:

$$\begin{tikzcd} \text{reláció} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{objektumpárok halmaza} \\ & \text{„szabály”} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Felmerül a kérdés, hogy ha egy nyelvi kifejezésben kicserélünk egy részt, ami azonos jelöletű, akkor változik-e az igazságérték. Frége szerint néha igen, néha nem.
Vegyük például azt a mondatot, hogy *A és B*. Itt ha B-t kicseréljük B'-re, akkor ha B és B' is igaz, akkor *A és B'* is igaz marad.
Ugyanakkor ha olyan a mondatot tekintünk, hogy *A mert B*, például *Másnapos vagyok mert berúgtam*, ez igaz, de a mondat második részét kicserélve egy szintén igaz állításra péládul arra, hogy $2 + 2 = 4$ a mondat már nem marad igaz.

Ez a felépítés sok problémát von maga után. Az a mondat, hogy *Szükségszerű, hogy nyolc nagyobb mint hét* igaz, de az hamis, hogy *Szükségszerű, hogy a bolygók száma nagyobb mint hét.* Hogy *Holnap esni fog* lehet igaz és lehet hamis, de az, hogy *Szükségszerű, hogy holnap esni fog* biztosan hamis. Ezeket a problémákat a modern logikában megoldották, de Frége nem tudta kiküszöbölni, és ebbe beleőrült.

A probléma egy lehetséges megoldása az, hogy nem kétértékű logikát csinálunk. A háromértékű logikában a harmadik igazságérték az $\frac{1}{2}$. Ez vonatkozik az olyan eldönthetetlen állításokra, mint például hogy *Holnap esni fog.* Hasonlóképpen lehet még több értékű logikákat definiálni, a végtelen értékű logika a valószínűségi logika, amely *Carnut* nevéhez fűződik.

Egy másik probléma az értékrés problémája. Ha például nincsen nővérem, akkor azok a mondatok, hogy *A nővérem szép* és az, hogy *A nővérem nem szép* egymás tagadásai, de egyikhez sem rendelünk igazságértéket. Hasonlóképpen az, hogy *A jelenlegi francia király kopasz* nem igaz, ha nem létezik francia király.

Tarski nevéhez fűződik a formális szemantika. Vegyük azt a mondatot például, hogy *Ez a mondat hamis.* Ez ellentmondáshoz vezet, amit kétféleképpen is kiküszöbölhetünk. Vagy azt csináljuk, mint Russel, hogy azt mondjuk, hogy egy mondat nem vonatkozhat saját magára, de ez nem az igazi, így Tarski azt mondta, hogy az igazságértéket kell száműzni a nyelvből, hiszen az igazság nem a tárgynyelvben, hanem a metanyelvben van. A metanyelvet is definiálni kellene azonban, így kellene egy meta-metanyelv, és így tovább a végtelenségig, aminek persze egy idő után nincsen értelme, így egy formális logikai rendszer nem lehet szemantikailag zárt.

Egy axiómarendszerrel szemben azok a legfontosabb követelések merültek fel, hogy legyen ellentmondásmentes, és legyen teljes, vagyis minden állítást vagy igazolni, vagy cáfolni lehessen. Ezen elvárások számára egy újabb csapást jelentettek **Kurt Gödel** nemteljességi tételei, amelyek azt mondják ki, hogy minden formális elméletben van eldönthetetlen állítás, valamint azt, hogy formális elmélet nem tudja igazolni a saját konzisztenciáját. Ezen tételek igazolásához Gödel először az aritmetikát lefordította logikára, majd a logikát írta le aritmetikával, így lehetővé vált, hogy egy logikai elmélet saját magáról tudjon beszélni. Ezek a tételek azt is jelentik, hogy a logika kevés ahhoz, hogy minden tudáshoz keretet adjon.